

## Stabilität der Aufhängung beim Schwergutumschlag

### Inhalt

Einleitung .....	1
1. Beurteilung von Aufhängungen.....	2
1.1 Grundsätze der Aufhängestabilität.....	2
1.2 Fallstudien.....	4
1.2.1 Heben des Nachbaus der Santa Maria.....	4
1.2.2 Heben eines Kernreaktors.....	4
1.2.3 Heben eines Katamarans.....	5
1.2.4 Aufhängung mit schrägen Sekundärstropfen.....	5
1.2.5 Tandem-Umschlag mit Primäraufhängung .....	6
1.2.6 Tandem-Umschlag mit Primär- und Sekundäraufhängung .....	7
1.2.7 Tandem-Umschlag mit katastrophalem Ausgang .....	8
1.2.8 Einzelkranumschlag mit asymmetrischer Aufhängung .....	9
1.2.9 Tandem-Umschlag mit asymmetrischer Aufhängung .....	10
1.3 Prüfwerkzeuge.....	11
1.3.1 Reine Primäraufhängung .....	11
1.3.2 Primär- und Sekundäraufhängung .....	13
1.3.3 Asymmetrische Aufhängungen.....	14
2. Mathematische Herleitung .....	16
2.1 Vertikale Sekundäraufhängung.....	16
2.2 Schräge Sekundäraufhängung .....	17
2.3 Flexible Primäraufhängungen.....	21
2.4 Asymmetrische Aufhängungen.....	26

### Einleitung

Eine Ladungseinheit, die von einem Kran zum Zwecke des Umschlags gehoben werden soll, z.B. beim Be- oder Entladen eines Schiffes, muss zuverlässig mit dem Ladehaken verbunden werden. Dieser übliche Vorgang wird Anschlag genannt und nur dann nach einem vorgefertigten Plan ausgeführt, wenn die Ladungseinheit besonders schwer oder ungewöhnlich gestaltet oder sehr wertvoll ist.

Die Aufhängung muss so gewählt werden, dass sie dem Gewicht und den geometrischen Eigenheiten der Ladungseinheit gerecht wird, also die Anordnung der Anschlagpunkte und die Lage des Schwerpunkts berücksichtigt. Weiter müssen empfindliche Oberflächen beachtet werden, die nicht mit Anschlagmitteln in Kontakt kommen dürfen. Auch muss mit Unsicherheiten des Gewichts und der Lage des Schwerpunkts gerechnet werden.

Oft sind die Anschlagpunkte der Ladungseinheit unterhalb des Schwerpunkts angeordnet. Dies führt zu einer potenziell instabilen Aufhängung und muss vom Planer und auch von den Durchführenden besonders beachtet werden.

Komplexe Aufhängungen von Ladungseinheiten bestehen oft aus einer Primäraufhängung von Traversen oder Spreizen am Ladehaken und einer Sekundäraufhängung der Ladungseinheit an diesen Traversen oder Spreizen. Solche Aufhängungen sind empfindlicher gegenüber kleinen Horizontalabweichungen des Ladungsschwerpunkts als reine Primäraufhängungen. Sie reagieren mit größeren Schräglagen wegen des seitlichen Ausschlagens der Sekundäraufhängung. Und sie können tatsächlich kippen und umschlagen.

Sicherlich werden mehr als 99% aller weltweiten Kranumschlagsvorgänge ohne die Notwendigkeit einer aufwendigen Analyse der Anschlagstabilität durchgeführt. Aber es ist die kleine übrigbleibende Minderheit, die Kopfschmerzen bereitet, wenn die mechanischen Zusammenhänge unklar sind und das Anheben zum "russischen Roulette" wird. Deshalb enthält diese Abhandlung einige Grundsätze, Fallbeispiele und Lösungen für das Anschlagene ungewöhnlicher Ladungseinheiten.

# 1. Beurteilung von Aufhängungen

## 1.1 Grundsätze der Aufhängestabilität

Umgangssprachlich wird der Begriff Stabilität oft zur Kennzeichnung von Festigkeit oder Robustheit einer technischen Anordnung verwendet. In dieser Abhandlung steht Stabilität ausschließlich für die Eigenschaft einer Aufhängung, in der gewünschten, üblicherweise aufrechten Lage zu bleiben und nicht nach dem Anheben umzuschlagen.

Aufhängungen sind absolut stabil, wenn der Schwerpunkt der Ladung unterhalb der Ebene der Anschlagpunkte liegt. Solche Anschlagpunkte können Zapfen, Augplatten oder andere Verbindungsmöglichkeiten für Stoppen oder Schäkel sein. Bei Stropfen, die um den Körper einer Ladungseinheit herum geführt werden, stellt die Ebene des höchsten Kontakts der Stropfen mit der Ladung die Ebene der Anschlagpunkte dar (Bild 1.1).

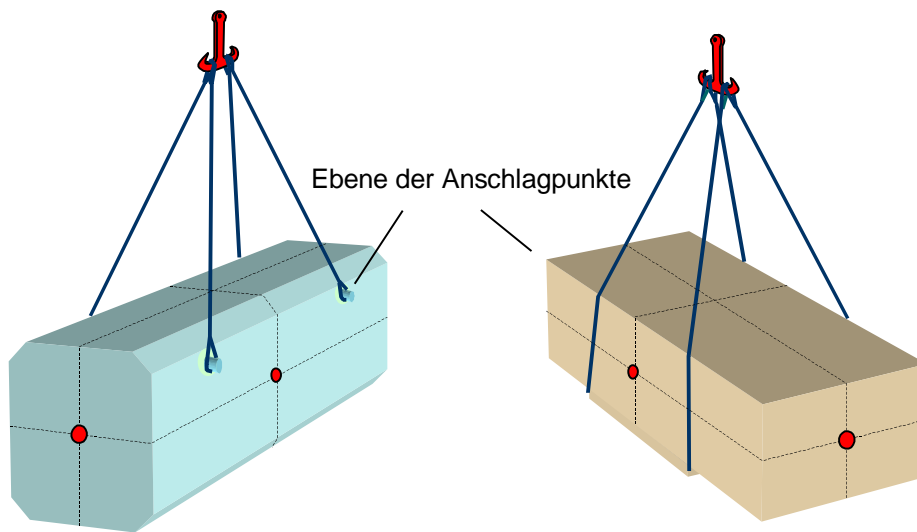


Bild 1.1: Absolut stabile Primär-Aufhängungen

Liegt der Schwerpunkt über der Ebene der Anschlagpunkte (Bild 1.2), ist die Aufhängung potenziell instabil. In allen solchen Fällen sollte die Aufhängung auf positive "metazentrische Höhe" überprüft werden.

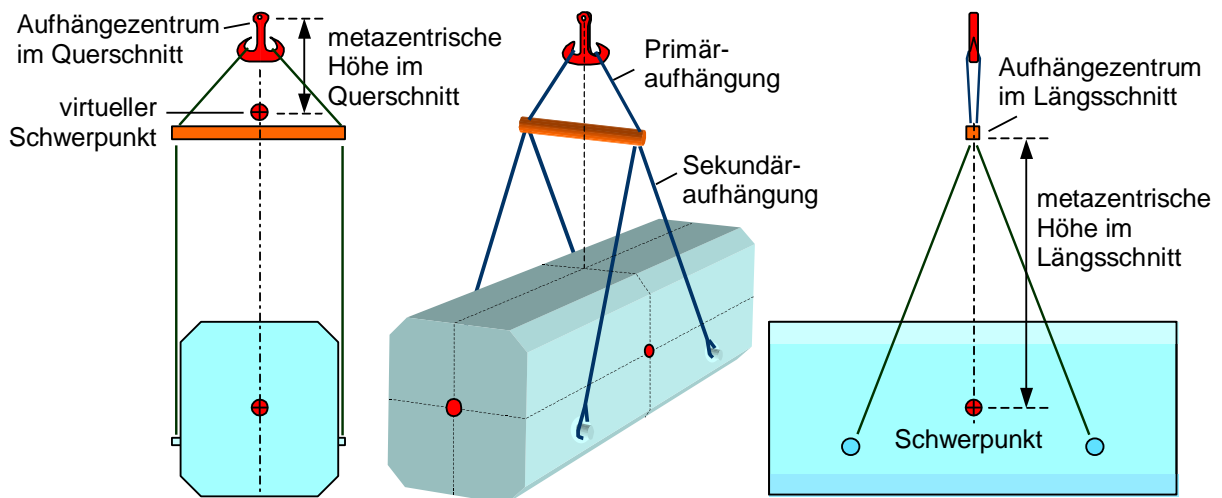


Bild 1.2: Potenziell instabile Primär/Sekundär-Aufhängung

Bild 1.2 zeigt eine Aufhängung mit unterschiedlichen metazentrischen Höhen in der Längs- und Queransicht. Es gelten die folgenden Definitionen:

<b>Metazentrische Höhe</b>	Vertikaler Abstand von Aufhängezentrum zum Ladungsschwerpunkt oder zum virtuellen Ladungsschwerpunkt, falls vorhanden. Die metazentrische Höhe ist positiv, wenn das Aufhängezentrum über dem (virtuellen) Schwerpunkt liegt.
<b>Aufhängezentrum</b>	Drehpunkt der Aufhängung bei einem angenommenen seitlichen Versatz des Ladungsschwerpunkts. Es kann unterschiedliche Drehpunkte in der Längs- und Queransicht geben. Der zutreffende Drehpunkt liegt stets am unteren Ende der vertikalen Kraftlinie des Anhebens.
<b>Virtueller Ladungsschwerpunkt</b>	Virtuelle Position über dem realen Ladungsschwerpunkt, rechnerisch begründet durch das mögliche seitliche Ausschwingen der Sekundäraufhängung oder durch elastische Verlängerung der Stropen bei sich verschiebender Belastung.
<b>Primäraufhängung</b>	Stropen, die den Ladehaken direkt mit der Ladung oder mit einer Traverse oder Spreize verbinden.
<b>Sekundäraufhängung</b>	Stropen, die eine Traverse/Spreize mit der Ladung verbinden.
<b>Umfang der Aufhängestabilität</b>	Neigungswinkelbereich, in dem eine Aufhängung stabil bleibt.

**Hinweis für Nautiker:** Hier besteht eine unmittelbare Analogie zwischen Aufhängestabilität und Schiffsstabilität und deren metazentrischer Höhe  $GM$ . Das Aufhängezentrum entspricht dem Metazentrum des Schiffes. Der virtuelle Schwerpunkt einer Aufhängung entspricht dem virtuellen Schwerpunkt des Schiffes, den man durch die Korrektur für freie Flüssigkeitsoberflächen in Tanks erhält, d.h. das Ausschwingen der Sekundäraufhängung hat eine Wirkung, die jener durch das Überlaufen von Flüssigkeit in einem teilgefüllten Tank entspricht.

Die Bestimmung der virtuellen Position des Schwerpunkts erfordert die geometrische Analyse einer kombinierten Primär/Sekundäraufhängung unter Verwendung folgender Größen:

- primärer Anschlagwinkel  $\phi$ ,
- Höhe der Primäraufhängung  $v$ ,
- sekundärer Anschlagwinkel  $\gamma$ ,
- Höhe der Sekundäraufhängung  $s$ ,
- Abstand des Ladungsschwerpunkts von der Ebene der Anschlagpunkte  $z$ .

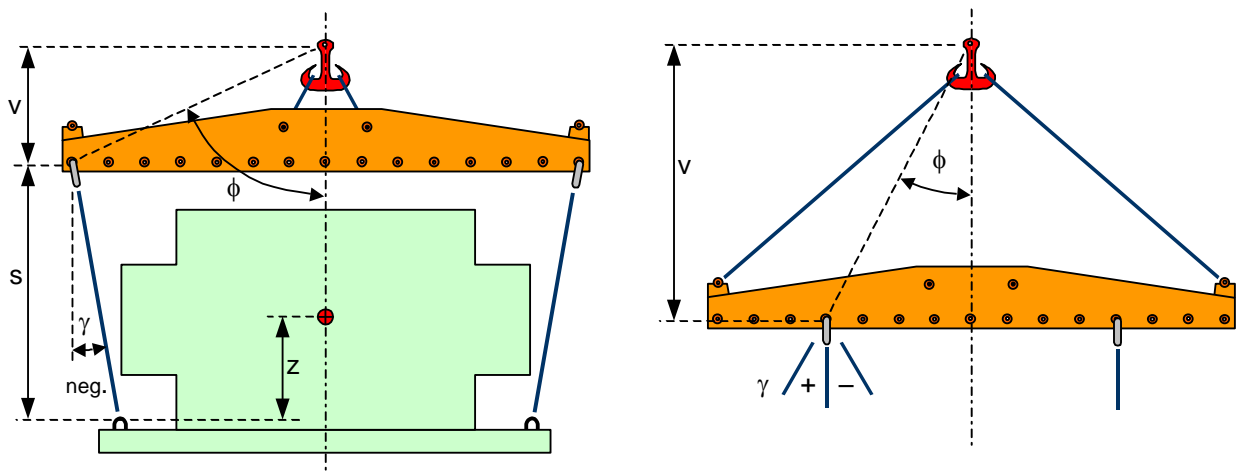


Bild 1.3: Definition von  $\phi$ ,  $\gamma$ ,  $v$ ,  $s$  und  $z$

Bild 1.3 erläutert die geometrischen Einflussgrößen. Der Winkel  $\phi$  liegt zwischen der Vertikalen und der Verbindung zwischen Aufhängezentrum und Angelpunkt der Sekundäraufhängung. Der Winkel  $\gamma$  ist negativ, wenn die Sekundärstropen nach unten einwärts verlaufen.

## 1.2 Fallstudien

Das Auftreten von Aufhängungen mit knapper Stabilität ist nicht neu und Unfälle hat es gegeben. In früheren Zeiten litten Aufhängungen an Schiffsgeschirr unter der Forderung, die "Anschlaghöhen" möglichst zu begrenzen, da die verfügbaren "Heißhöhen" der Schwergutbäume in der Regel viel kleiner waren als die der heutigen Schwergutkrane. Die Forderung nach kleinen Anschlaghöhen führte zu konstruktiven Primäraufhängungen von Traversen, deren Höhe nahezu gleich Null war. Das wird in den nächsten zwei Fällen vorgeführt.

### 1.2.1 Heben des Nachbaus der Santa Maria

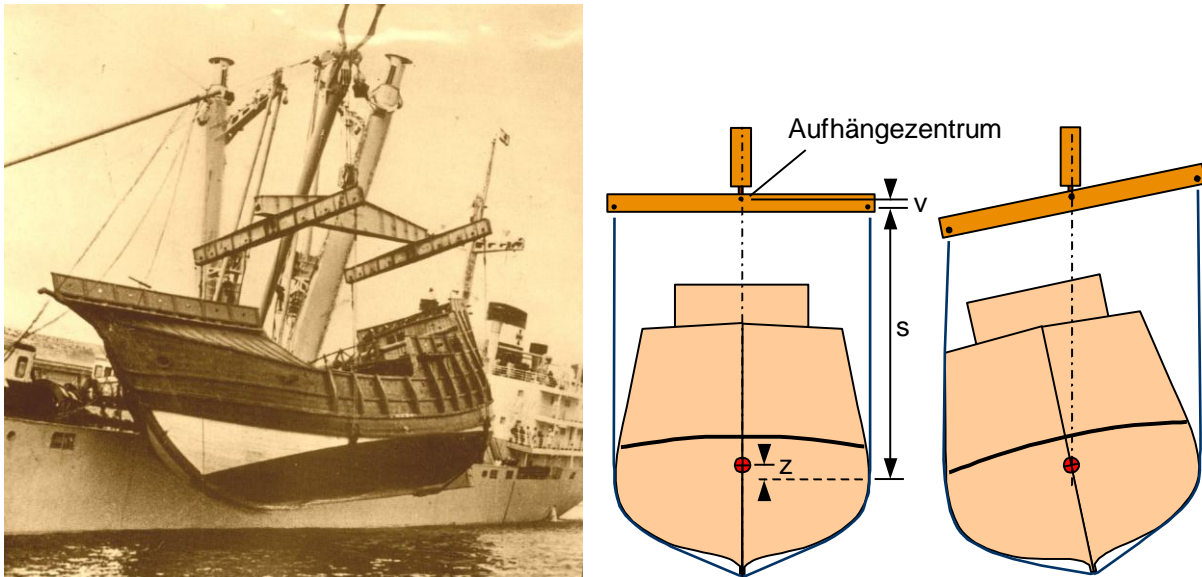


Bild 1.4: Heben des Nachbaus der Santa Maria mit möglicher instabiler Aufhängung

Die Aufhängung in Bild 1.4 zeigt die typische geringe Höhe  $v$  der Primäraufhängung der Quertraversen in jener Zeit (1963). Die genaue Höhenlage des Schwerpunkts des Nachbaus war sicherlich nicht bekannt. Die metazentrische Höhe dieser Aufhängung kann berechnet werden mit:

$$h = v \cdot \left( 1 + \frac{m_T}{m_C} \right) - z \text{ [m]}$$

$h$  = metazentrische Höhe [m]

$v$  = Höhe der Primäraufhängung [m]

$m_T$  = Masse beider Quertraversen [t] (ca. 8 t)

$m_C$  = Masse der Ladungseinheit [t] (ca. 100 t)

$z$  = Höhe des Schwerpunkts über der Ebene der Anschlagpunkte [m]

Offensichtlich ist die metazentrische Höhe der Aufhängung sehr klein oder sogar negativ. Es bleibt daher offen, ob die Schräglage des Nachbaus von einer kleinen Ausmittigkeit des Schwerpunkts oder einer negativen metazentrischen Höhe herrührt. In jedem Fall stabilisiert der Druck der Stropfen an der tieferen Seite die ganze Aufhängung.

### 1.2.2 Heben eines Kernreaktors

Die Aufhängung einer 360 t Einheit in Bild 1.5 zeigt die gleiche kurze Strecke  $v$  wie im vorangegangenen Fall. Die Anordnung hängt gerade, entweder weil die metazentrische Höhe noch positiv ist oder infolge der stabilisierenden Wirkung des Kontakts der Sekundärstropfen mit dem Körper der Ladungseinheit. Die metazentrische Höhe wird mit der gleichen Formel berechnet wie im Fall 1.2.1 zuvor.

$$h = v \cdot \left( 1 + \frac{m_T}{m_C} \right) - z \text{ [m]}$$



Bild 1.5: Heben eines Kernreaktors, Naheinstellung von Schwerpunkt und Aufhängezentrum

### 1.2.3 Heben eines Katamarans

Die Aufhängung in Bild 1.6 zeigt eine größere Distanz  $v$  wegen der Primäraufhängung mit kurzen Stropfen. Aber es gibt auch eine große Distanz  $z$ , welche das Risiko einer sehr kleinen oder sogar negativen metazentrischen Höhe der Aufhängung begründet.

Das Schwerstück hängt leicht schräg und wird nur durch Kontakt mit den Sekundärstropfen stabilisiert. Es gab am Rumpf keine Beschädigungen wegen der Verwendung von Polyesterstropfen. Die metazentrische Höhe wird wieder berechnet mit der Formel:

$$h = v \cdot \left( 1 + \frac{m_T}{m_C} \right) - z \text{ [m]}$$

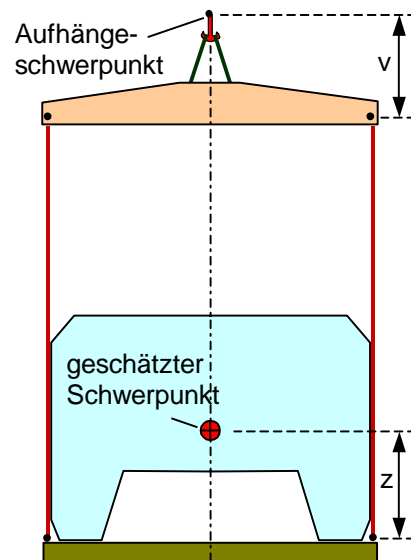


Bild 1.6: Heben eines Katamaran-Rumpfes, geschätzte Schwerpunktlage

### 1.2.4 Aufhängung mit schrägen Sekundärstropfen

Die Aufhängung in Bild 1.7 zeigt einwärts geneigte Sekundärstropfen. Obwohl die Höhe der Primäraufhängung  $v$  recht groß ist im Vergleich zur Höhe  $z$  des Schwerpunkts, beträgt die

metazentrische Höhe nur etwa 1 m infolge der einwärts gerichteten Neigung der Sekundärstropfen. Bei schrägen Sekundärstropfen muss die metazentrische Höhe mit Hilfe erweiterter Formeln berechnet werden:

$$c = \cos^2 \gamma - \left(1 + \frac{m_T}{m_C}\right) \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \cos \gamma}{\tan \phi} \quad (\text{Hinweis: } c = 1 \text{ für } \gamma = 0)$$

$$h = s \cdot (1 - c) + v \cdot \left(1 + \frac{m_T}{m_C}\right) - z \cdot \left(1 - \frac{c \cdot s \cdot \tan \gamma}{v \cdot \tan \phi + s \cdot \tan \gamma}\right) \quad [\text{m}]$$

$h$  = metazentrische Höhe [m]

$c$  = Proportionalitätsfaktor =  $d\gamma / d\phi$

$\phi$  = Primärer Anschlagwinkel [°]

$\gamma$  = sekundärer Anschlagwinkel [°]

$v$  = Höhe der Primäraufhängung [m]

$m_T$  = Masse beider Querspreizen [t]

$m_C$  = Masse der Ladungseinheit [t]

$z$  = Höhe des Schwerpunkts über der Ebene der Anschlagpunkte [m]

Die geschätzten Einflussgrößen betragen in diesem Fall:

$v = 3.6 \text{ m}$ ,  $s = 7.5 \text{ m}$ ,  $z = 1.1 \text{ m}$ ,  $\phi = 26^\circ$ ,  $\gamma = -4^\circ$ ,  $m_T = 2 \text{ t}$ ,  $m_C = 60 \text{ t}$

Ergebnisse:  $c = 1.14256$ ,  $h = 1.0 \text{ m}$

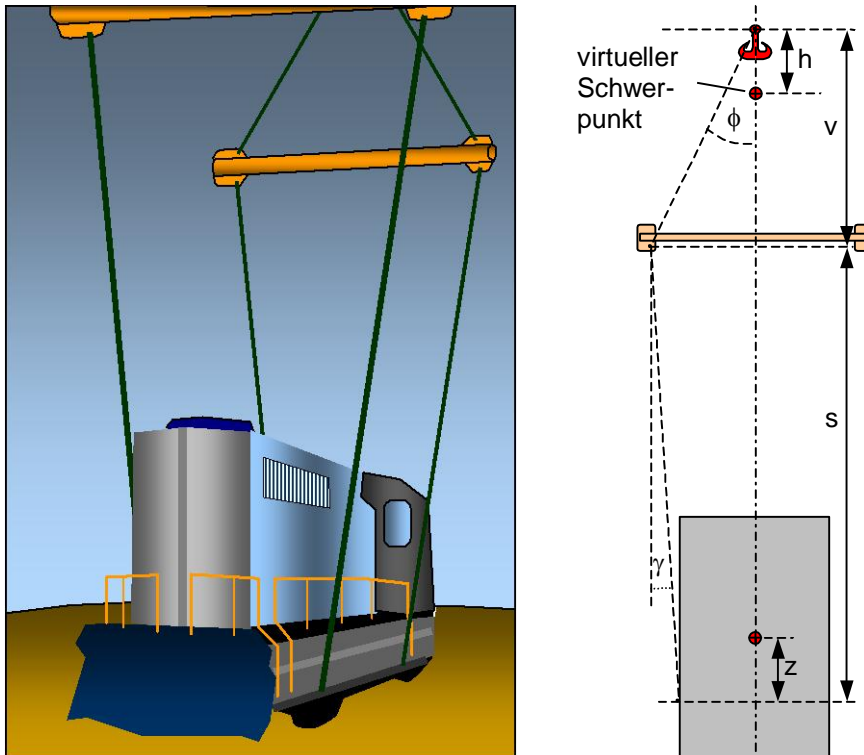


Bild 1.7: Aufhängung mit einwärts geneigten Sekundärstropfen, geschätzte Einflussgrößen

Diese Aufhängung ist recht empfindlich gegenüber negativen Winkeln  $\gamma$  wegen der großen Distanz  $s$ . Ein Winkel  $\gamma = -6^\circ$  würde bereits zu einer negativen metazentrischen Höhe führen.

### 1.2.5 Tandem-Umschlag mit Primäraufhängung

Bild 1.8 zeigt einen Tandem-Umschlag mit reiner Primäraufhängung. Derartige Aufhängungen sind stabil, sofern der Ladungsschwerpunkt unterhalb des Aufhängezentrums liegt. Der Umfang der Stabilität hängt von der Breite der Anschlagbasis ab. Die metazentrische Höhe

würde normalerweise zu  $h = (v - z)$  Meter in der Längsansicht bestimmt, während sie in der Queransicht als unendlich groß gelten kann.

Tatsächlich aber wird die Stabilität solcher Aufhängungen durch die elastische Nachgiebigkeit der Strophen verringert, weil eine kleine Ausmittigkeit des Schwerpunkts, z.B. nach links, die Aufhängung nach links neigen lässt und dabei die linken Strophen belastet und die rechten entlastet. Durch die elastischen Längenänderungen entsteht eine zusätzliche Neigung der Anschlagbasis nach links, die rechnerisch als Folge einer scheinbar höheren Position des Schwerpunkts dargestellt werden kann.

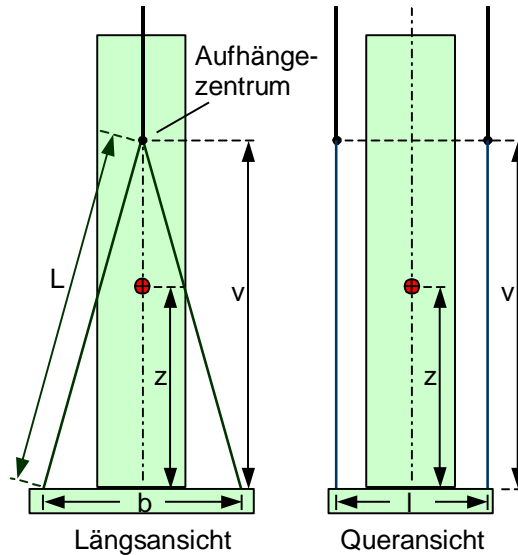


Bild 1.8: Tandem-Umschlag mit Primäraufhängung, Einflussgrößen

Die relative Dehnung bei Erreichen von WLL von Polyesterstrophen kann mit  $\epsilon = 0,023$  (= 2,3%) und die von Drahtseilstrophen mit  $\epsilon = 0,004$  (= 0,4%) angenommen werden. Die Formeln für die Bestimmung der metazentrischen Höhen werden in Kapitel 1.3 genannt. Die geschätzten Einflussgrößen betragen in diesem Fall:

$L = 15$  m,  $v = 14,5$  m,  $b = 7,7$  m,  $l = 5,9$  m,  $z = 8,4$  m,  $\epsilon = 0,023$  (Polyester),  $\epsilon = 0,004$  (Stahl)

	ohne Nachgiebigkeit	Stahldrahtstrophen	Polyesterstrophen
Längsansicht	$h = 6,1$ m	$h = 5,6$ m	$h = 3,2$ m
Queransicht	$h = \text{unendlich}$	$h = 141,6$ m	$h = 17,7$ m

Die Ergebnisse zeigen in allen Fällen ausreichende Werte. Das kann sich mit anderen Einflussgrößen jedoch schnell ändern, vor allem mit kleineren Werten von  $b$  und  $l$ .

### 1.2.6 Tandem-Umschlag mit Primär- und Sekundäraufhängung

Bild 1.9 zeigt drei mögliche Aufhängungen mit gleicher Gesamt-Anschlaghöhe, aber unterschiedlichen Anteilen der Primär- und Sekundäraufhängung. Die Ebene M kennzeichnet das Aufhängezentrum, während  $G^*$  jeweils den virtuellen Schwerpunkt darstellt. Die metazentrische Höhe nimmt mit dem Höheanteil der Primäraufhängung ab. Die Aufhängung rechts ist eindeutig instabil. Das begründet die Entwurfsregel:

Bei gegebener Anschlaghöhe soll der Anteil der Primäraufhängung so groß wie möglich sein.

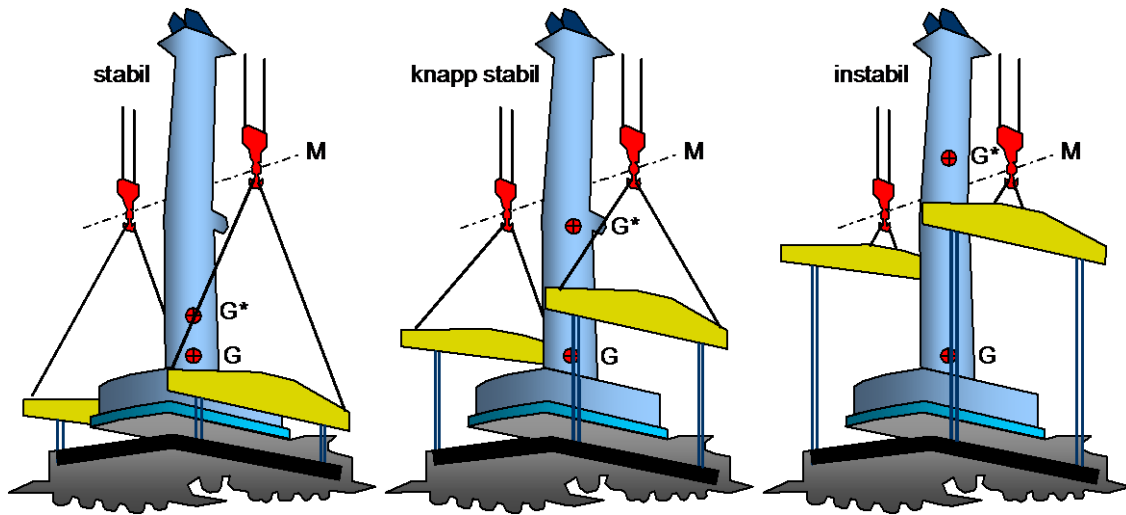


Bild 1.9: Unterschiedliche Ausführungen von Primär- und Sekundäraufhängungen

### 1.2.7 Tandem-Umschlag mit katastrophalem Ausgang

Bild 1.10 zeigt das Resultat unzureichender Aufhängestabilität bei der Entladung eines voll aufgetakelten Mobilkrans im Jahre 2010. Die metazentrische Höhe lag offensichtlich im Grenzbereich und das Umschlagen geschah kurz vor dem Absetzen der Ladungseinheit auf den Kai. Die Ursache war möglicherweise ein leichter Windstoß auf den langen Ausleger des Mobilkrans. Glücklicherweise wurde niemand verletzt. Es musste ein neuer Kran geordert werden.

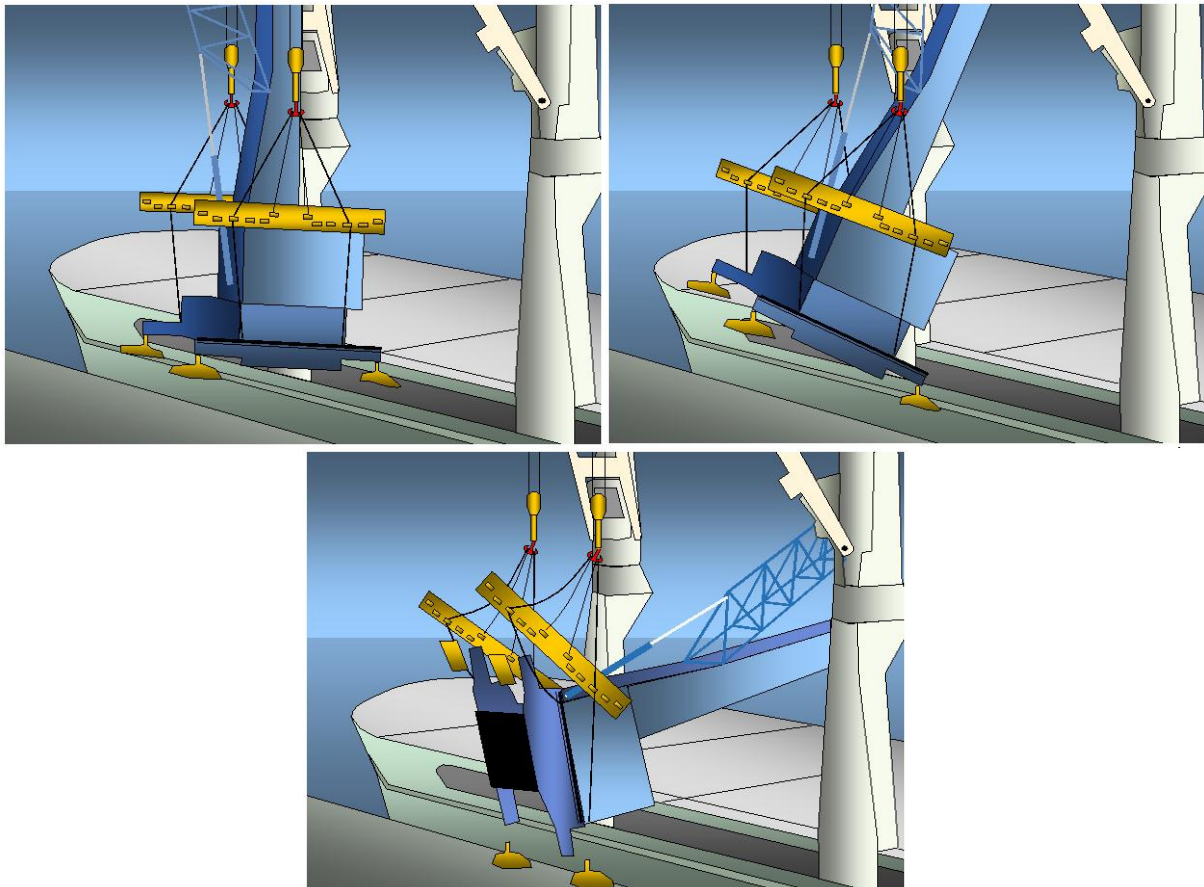


Bild 1.10: Umschlagen infolge unzureichender metazentrischer Höhe der Aufhängung



### 1.2.8 Einzelkranumschlag mit asymmetrischer Aufhängung

Bild 1.11 zeigt eine asymmetrische Aufhängung zum Heben eines schweren Kipplasters. Die vordere Aufhängung besteht aus einem einzelnen vertikalen Rundstropf, der an einem Anschlagpunkt unterhalb des Schwerpunkts des Lasters befestigt ist. Diese vordere Aufhängung ist mit Sicherheit instabil mit einer negativen metazentrischen Höhe  $h_1 = -z$ , wie in der Schemazeichnung angegeben.

Das hintere Anschlaggeschirr besteht aus einer Primär- und Sekundäraufhängung. Die Anschlagpunkte liegen offensichtlich über dem Schwerpunkt, was nach den hier vereinbarten Vorzeichenregeln zu einem negativen z-Wert führt. Der sekundäre Anschlagwinkel  $\gamma$  ist ebenfalls negativ. Die metazentrische Höhe der hinteren Aufhängung wird berechnet mit:

$$c = \cos^2 \gamma - \left(1 + \frac{m_T}{m_C}\right) \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \cos \gamma}{\tan \phi}$$

$$h_2 = s \cdot (1 - c) + v \cdot \left(1 + \frac{m_T}{m_2}\right) - z \cdot \left(1 - \frac{c \cdot s \cdot \tan \gamma}{v \cdot \tan \phi + s \cdot \tan \gamma}\right) \text{ [m]}$$

Die gemeinsame metazentrische Höhe wird berechnet mit:

$$h = \frac{m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2}{m} \text{ [m]}$$

$h$  = gemeinsam metazentrische Höhe [m]

$h_1$  = vordere metazentrische Höhe [m]

$h_2$  = hintere metazentrische Höhe [m]

$c$  = Proportionalitätsfaktor =  $d_\gamma / d_\phi$

$\phi$  = primärer Anschlagwinkel [°]

$\gamma$  = sekundärer Anschlagwinkel [°]

$v$  = Höhe der Primäraufhängung [m]

$m_T$  = Masse der Querspreize [t]

$m_1$  = anteilige Masse vorn [t]

$m_2$  = anteilige Masse hinten [t]

$z$  = Höhe des Schwerpunkts über der Ebene der Anschlagpunkte [m]

Die Einflussgrößen werden in diesem Fall geschätzt zu:

$m_1 = 15 \text{ t}$ ,  $h_1 = -0,8 \text{ m}$ ,  $m_2 = 15 \text{ t}$ ,  $m_T = 1 \text{ t}$ ,  $v = 2,0 \text{ m}$ ,  $s = 3,5 \text{ m}$ ,  $z = -1,0 \text{ m}$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $\gamma = -8^\circ$

Ergebnisse:  $c = 1,12764$ ,  $h_2 = 3,05 \text{ m}$

$$h = \frac{15 \cdot -0,8 + 15 \cdot 3,05}{30} = 1,1 \text{ m}$$

Die Aufhängung ist insgesamt ausreichend stabil.

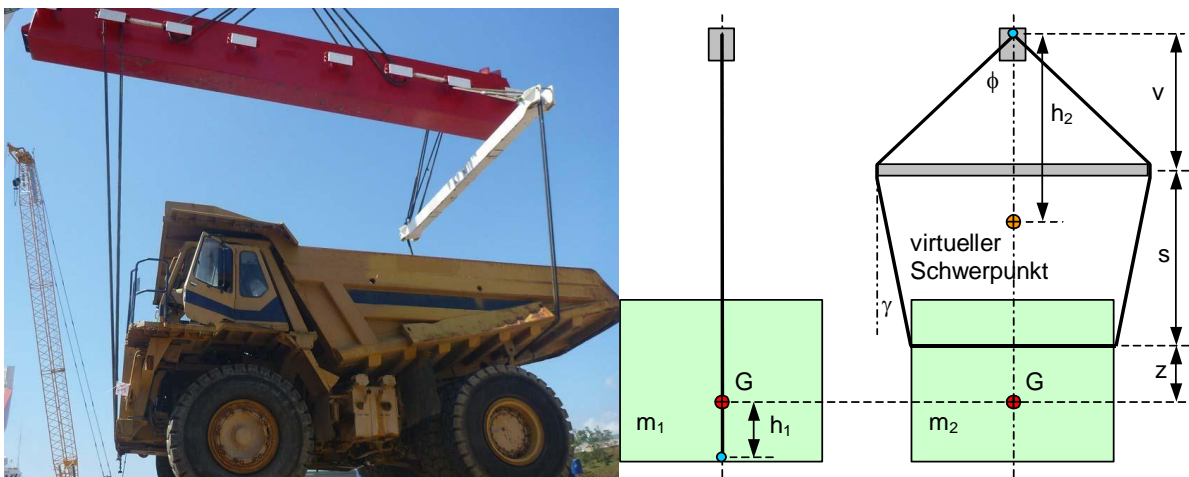


Bild 1.11: Asymmetrische Aufhängung

### 1.2.9 Tandem-Umschlag mit asymmetrischer Aufhängung

Bild 1.12 zeigt einen Tandem-Umschlag mit einer Aufhängung, in der die Aufhängezentren wie auch die virtuellen Schwerpunkte der Teilmassen in verschiedenen Höhenebenen liegen. Das gemeinsame Aufhängezentrum wie auch der gemeinsame virtuelle Schwerpunkt lassen sich graphisch ermitteln. Das wird in Bild 1.13 dargestellt.



Bild 1.12: Tandem-Umschlag mit asymmetrischer Aufhängung

Die metazentrischen Höhen der vorderen und hinteren Aufhängung und die gemeinsame metazentrische Höhe werden nach den gleichen Formeln ermittelt wie im vorangegangenen Beispiel. Die notwendigen Einflussgrößen sind hier recht genau geschätzt worden:

Einflussgröße	linke Aufhängung	rechte Aufhängung
v	6,05 m	6,28 m
s	18,19 m	7,20 m
z	3,54 m	3,54 m
$\phi$	27,1 °	22,5 °
$\gamma$	-2,1 °	-1,4 °
$m_T$	1,6 t	1,6 t
$m_{C1,2}$	185,6 t	160,4 t
$c_{1,2}$	1,07083	1,05896
$h_{1,2}$	0,233 m	2,106 m

$$h = \frac{185,6 \cdot 0,233 + 160,4 \cdot 2,106}{346,0} = 1,10 \text{ m}$$

Die Ladungseinheit hängt gerade, doch ist die Stabilität klein. Sie hätte durch eine höhere Primäraufhängung auf der rechten Seite verbessert werden können. Ein Kippen war jedoch wegen der Stützwirkung der langen Sekundärstropfen ausgeschlossen.

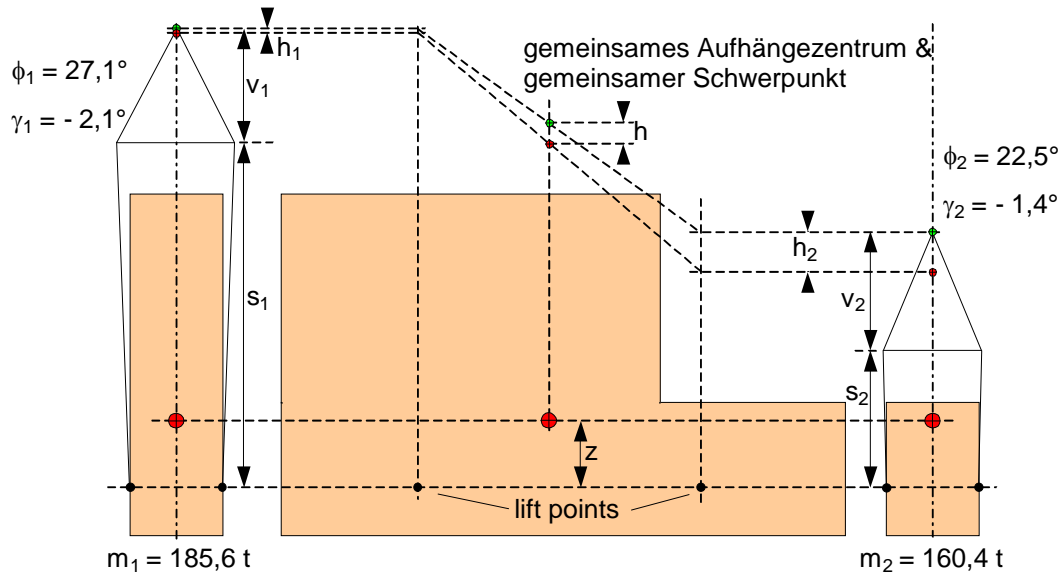


Bild 1.13: Graphische Bestimmung der gemeinsamen metazentrischen Höhe

### 1.3 Prüfwerkzeuge

Die Stabilität einer Aufhängung sollte immer überprüft werden, wenn die Anschlagpunkte an der Ladungseinheit unter deren Schwerpunkt liegen. Die anzuwendenden Formeln für die Prüfung einer Aufhängung werden nachstehend übersichtlich aufgeführt.

#### 1.3.1 Reine Primäraufhängung

Bild 1.14 zeigt die notwendigen Kenngrößen für die Prüfung einer reinen Primäraufhängung. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier eine symmetrische Aufhängung angenommen.

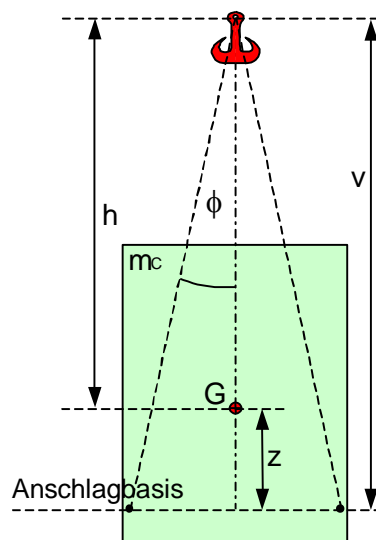


Bild 1.14: Kenngrößen einer Primäraufhängung

#### Metazentrische Höhe

$$h = v - z \text{ [m]}$$

Achtung: z ist negativ, wenn G unter der Basislinie liegt.

Wenn  $\phi < 5^\circ$  UND  $z > v \cdot \tan\phi$ , kann die Stabilität der Aufhängung durch eine kleine Störung, z.B. Wind oder Wellenbewegung, überwunden werden. Die Aufhängung sollte daher so be-

urteilt werden, als bestünde sie aus einem Stropp mit dem Aufhängezentrum im Anschlagpunkt, es sei denn, sie wird besonders stabilisiert. Andernfalls ist die metazentrische Höhe:

$$h = -z \text{ [m]}$$

### Einsatz von Kunstfaserstroppen

Kunstfaserstroppen verlängern sich bei Erreichen ihres WLL etwas 6 mal so viel wie vergleichbare Drahtseilstroppen. Das ergibt sich aus der relativen Dehnung von  $\varepsilon = 0,023$  (= 2,3%) für Polyesterstroppen und  $\varepsilon = 0,004$  (= 0,4%) für Drahtseilstroppen. Diese Zahlen sind nur als Anhaltewerte zu verstehen. Sie können in der Praxis schwanken.

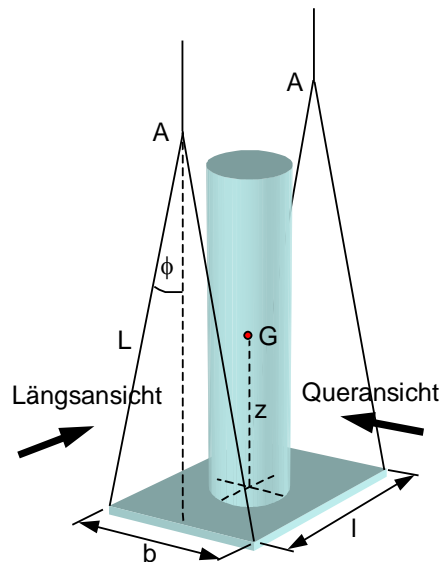


Bild 1.15: Bestimmung der metazentrischen Höhe bei Verwendung von Kunstfaserstroppen

Die metazentrische Höhe solcher Aufhängungen sollte gemäß der Erklärung unter 1.2.5 mit folgenden erweiterten Formeln bestimmt werden:

$$h = v - z \cdot \left( 1 + \frac{4 \cdot L^2 \cdot \varepsilon}{b^2} \right) \text{ [m]} \quad \text{für die Längsansicht}$$

$$h = \frac{l^2}{4 \cdot v \cdot \varepsilon} - z \text{ [m]} \quad \text{für die Queransicht}$$

$h$  = metazentrische Höhe [m]

$L$  = Länge der Primärstroppen [m]

$\varepsilon$  = relative Dehnung der Stroppen bei Erreichen ihres WLL

$b$  = Abstand der Anschlagpunkte in der Längsansicht [m]

$l$  = Abstand der Anschlagpunkte in der Queransicht [m]

$v$  = Höhe der Primäraufhängung [m]

$z$  = Höhe des Schwerpunkts über der Ebene der Anschlagpunkte [m]

### Umfang der Stabilität

Der Stabilitätsumfang einer Primäraufhängung kann durch das aufrichtende Moment des Stropps auf einer Seite dargestellt werden als Funktion eines Kippwinkels  $\delta$ . Ein Kippwinkel tritt z.B. als Folge eines horizontalen Fehlers  $e$  der Schwerpunktlage der Ladung auf.

$$\tan \delta = \frac{e}{h}$$

$$M = \frac{W}{4} \cdot h \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \delta - \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \delta}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta} \quad (\text{Hinweis: } M = 0 \text{ bei } \delta = \varphi)$$

Das anfängliche aufrichtende Moment bei  $\delta = 0$  beträgt:

$$M_0 = \frac{W}{4} \cdot h \cdot \tan \phi$$

$\delta$  = Kippwinkel [°]

$M$  = aufrichtendes Moment [kN·m]

$M_0$  = anfängliches aufrichtendes Moment [kN·m]

$e$  = möglicher Querversatz des Schwerpunkts der Ladungseinheit [m]

$h$  = metazentrische Höhe der Aufhängung [m]

$W$  = Gewicht der Ladungseinheit ( $m \cdot g$ ) [kN]

$\phi$  = primärer Anschlagwinkel [°]

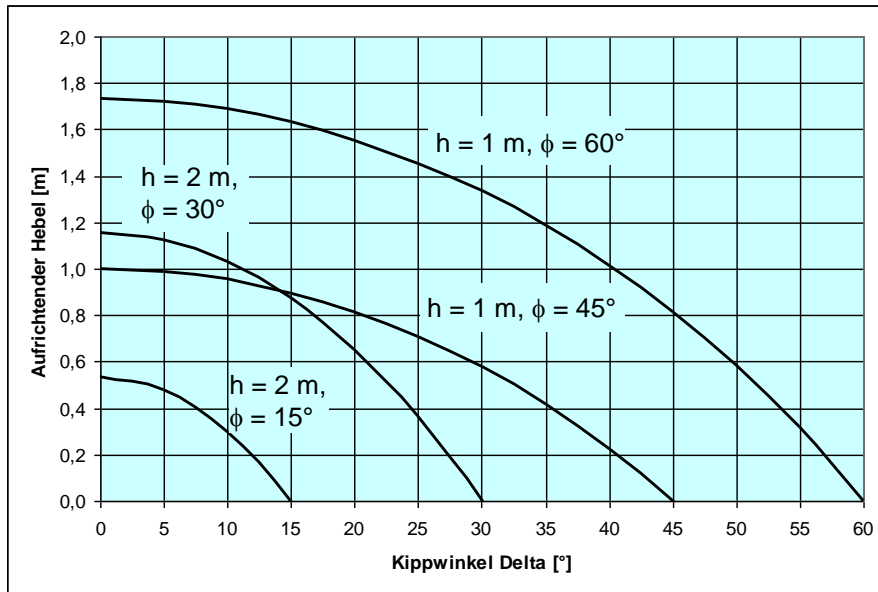


Bild 1.16: Umfang der Anschlagstabilität

### 1.3.2 Primär- und Sekundäraufhängung

Bild 1.16 zeigt die bestimmenden Größen für die Prüfung einer Aufhängung mit Primär- und Sekundärströppen.

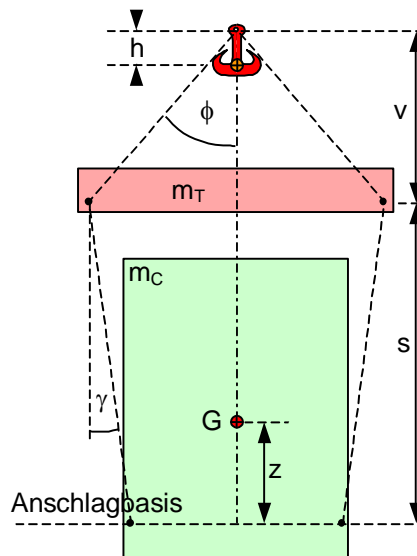


Bild 1.17: Einflussgrößen einer Primär- und Sekundäraufhängung

### Metazentrische Höhe

$$h = s \cdot (1 - c) + v \cdot \left(1 + \frac{m_T}{m_C}\right) - z \cdot \left(1 - \frac{c \cdot s \cdot \tan \gamma}{v \cdot \tan \varphi + s \cdot \tan \gamma}\right) \text{ [m]}$$

$$c = \cos^2 \gamma - \left(1 + \frac{m_T}{m_C}\right) \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \cos \gamma}{\tan \varphi}$$

Die Formeln zur Bestimmung von c und h sind unbequem und anfällig für Eingabefehler bei manueller Lösung mit dem Taschenrechner. Es wird daher eine einfache Excel-Tabelle zur Anwendung empfohlen, wie nachstehend dargestellt. Die grünen Zellen dienen der Eingabe, die orangefarbenen enthalten die Ergebnisse.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	s	v	z	phi	gamma	m <sub>T</sub>	m <sub>C</sub>	h
2	8,46	4,56	2,66	42,0	-7,0	18,0	64,0	0,809
3			c	phi rad	gamma rad			
4			1,15727	0,73304	-0,12217			
5								

c:  $C4 = \cos(E4)^2 - (1 + F2/G2) \cdot \sin(E4) \cdot \cos(E4) / \tan(D4)$

$\phi_{\text{rad}}$ :  $D4 = D2 \cdot \text{PI}() / 180$

$\gamma_{\text{rad}}$ :  $E4 = E2 \cdot \text{PI}() / 180$

h:  $H2 = B2 \cdot (1 + F2/G2) + A2 \cdot (1 - C4) - C2 \cdot (1 - C4 \cdot A2 \cdot \tan(E4) / (B2 \cdot \tan(D4) + A2 \cdot \tan(E4)))$

Falls die sekundäre Aufhängung exakt vertikal ist, d.h.  $\gamma = 0$  und  $c = 1$ , vereinfacht sich die Formel für die metazentrische Höhe zu:

$$h = v \cdot \left(1 + \frac{m_T}{m_C}\right) - z \text{ [m]}$$

### Einsatz von Kunstfaserstropfen

Die Verwendung von Kunstfaserstropfen in einer kombinierten Primär- und Sekundäraufhängung führt zur gleichen Beeinträchtigung der metazentrischen Höhe, wie es für reine Primäraufhängungen gezeigt worden ist. Es wird daher empfohlen, solche Stropfen in kombinierter Aufhängung nur dann zu verwenden, wenn eine reichliche metazentrische Höhe nachgewiesen werden kann.

### 1.3.3 Asymmetrische Aufhängungen

Im Falle von asymmetrischen Aufhängungen sollten die Anordnungen an beiden Enden der Ladungseinheit getrennt untersucht werden mit den Ergebnissen der Teilmassen  $m_1$  und  $m_2$  und der zugehörigen metazentrischen Höhen  $h_1$  und  $h_2$ . Die gemeinsame metazentrische Höhe erhält man mit:

$$h = \frac{m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2}{m} \text{ [m]}$$

h = gemeinsame metazentrische Höhe [m]

$h_1$  = vordere metazentrische Höhe [m]

$h_2$  = hintere metazentrische Höhe [m]

m = Gesamtmasse der Ladungseinheit [t]

$m_1$  = Teilmasse der Ladungseinheit am vorderen Ende [t]

$m_2$  = Teilmasse der Ladungseinheit am hinteren Ende [t]

## 2. Mathematische Herleitung

### 2.1 Vertikale Sekundäraufhängung

Bild 2.1 zeigt eine Aufhängung mit Primär- und Sekundärstropfen. Die Masse der Spreize wird vernachlässigt.

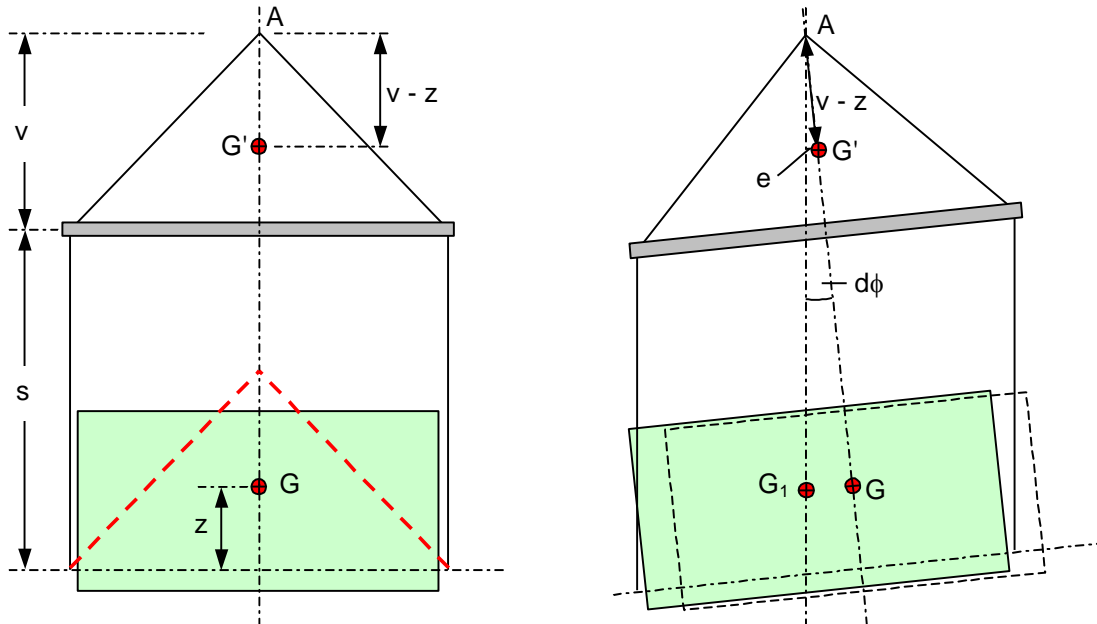


Bild 2.1: Virtuelle Position des Ladungsschwerpunkts bei vernachlässigter Spreizenmasse

In Bild 2.1 links hängt die Ladung gerade. Im rechten Teil ist sie um den kleinen Winkel  $d\phi$  geneigt infolge einer zunächst unbekanntenen Ausmittigkeit  $e$  des Schwerpunkts. Diese Ausmittigkeit soll bestimmt werden als Differenz der Gesamtverschiebung des Schwerpunkts  $GG_1$  und der Strecke  $s \cdot d\phi$  infolge des Ausschlagens der Sekundäraufhängung.

$$GG_1 = (v + s - z) \cdot d\phi \quad [\text{m}]$$

$$e = (v + s - z) \cdot d\phi - s \cdot d\phi = (v - z) \cdot d\phi \quad (1)$$

Die Distanz  $(v - z)$  unterhalb des Aufhängezentrums führt zu einem Punkt, an dem die Ausmittigkeit  $e$  allein die Neigung  $d\phi$  und die neue Gleichgewichtslage verursachen würde. Dieser Punkt ist der "virtuelle" Schwerpunkt der aufgehängten Ladung. Die wirksame metazentrische Höhe der Aufhängung ist:

$$h = v - z \quad [\text{m}] \quad (2)$$

Dies führt zur bekannten praktischen Regel: "Ziehe die Primäraufhängung zeichnerisch herunter bis zur Basis der Sekundäraufhängung. Solange der wirkliche Schwerpunkt innerhalb des Dreiecks der verschobenen Primäraufhängung liegt, hängt die Ladung stabil."

Die vorgenannte praktische Regel ist nicht ganz korrekt, da sie die stabilisierende Wirkung der Spreize vernachlässigt. Diese Wirkung wird nachstehend untersucht, wobei der gemeinsame Schwerpunkt  $G^*$  von Ladung und Spreize betrachtet wird.

Dabei zeigt sich, dass der Einfluss der Masse der Spreize in den Ergebnissen in Form des Verhältnisses  $m_T / m_C$  auftritt. Bei symmetrischer Aufhängung an beiden Enden der Ladungseinheit ist dabei  $m_T$  gleich der Masse beider Spreizen und  $m_C$  ist die Gesamtmasse der Ladung. Bei unterschiedlichen Aufhängungen, wo beide Enden der Ladung getrennt untersucht werden, ist  $m_T$  die Masse der betreffenden Spreize und  $m_C$  ist die anteilige Masse am betrachteten Ladungsende.



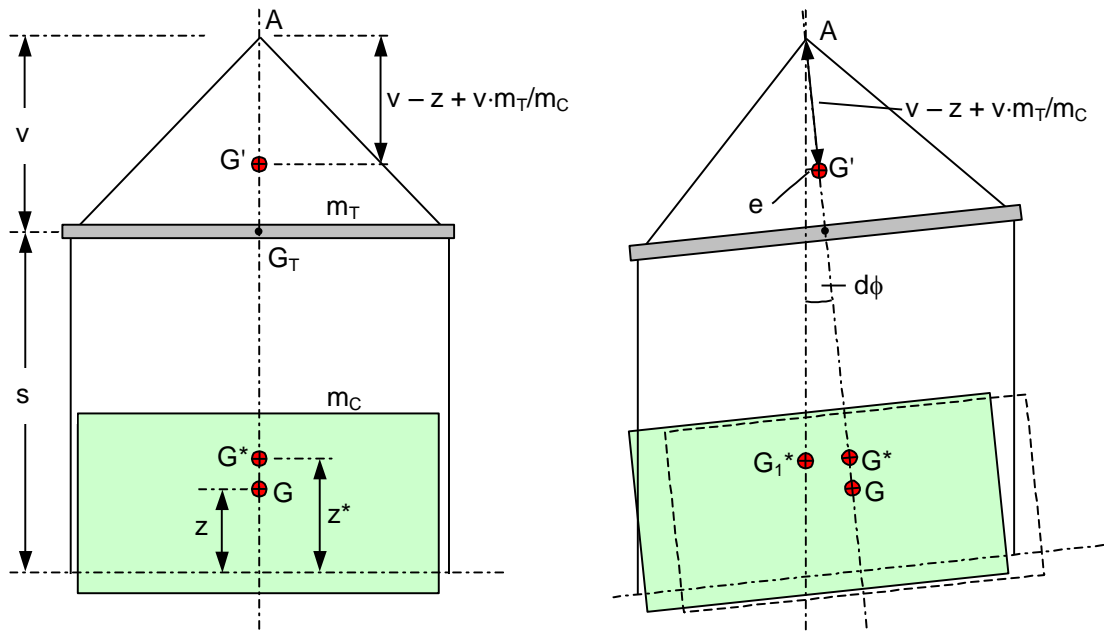


Bild 2.2: Virtuelle Position des Ladungsschwerpunkts bei berücksichtigter Masse der Spreize  
Die Höhe  $z^*$  des gemeinsamen Schwerpunkts von Ladung und Spreize wird berechnet mit:

$$z^* = \frac{m_C \cdot z + m_T \cdot s}{m_C + m_T} \text{ [m]} \quad (3)$$

Der gemeinsame Schwerpunkt  $G^*$  wandert während der Neigung nach  $G_1^*$ . Die Distanz dieser Bewegung ist:

$$G^* G_1^* = (v + s - z^*) \cdot d\phi \text{ [m]}$$

Diese Distanz ist auch die unbekanntene Ausmittigkeit  $e$  des Schwerpunkts vermehrt um die Schwenkdistanz  $s \cdot d\phi$  der Sekundäraufhängung. Durch Gleichsetzung kann die Ausmittigkeit  $e$  bestimmt werden.

$$G^* G_1^* = \frac{m_C \cdot (e + s \cdot d\phi)}{m_C + m_T} \text{ [m]} \quad (4)$$

Die Lösung lautet:

$$e = \left( v - z + v \cdot \frac{m_T}{m_C} \right) \cdot d\phi \text{ [m]} \quad (5)$$

Der virtuelle Ladungsschwerpunkt liegt um den Betrag  $v \cdot m_T/m_C$  tiefer als ohne Berücksichtigung der Spreizenmasse. Die wirksame metazentrische Höhe der Aufhängung ist:

$$h = v \cdot \left( 1 + \frac{m_T}{m_C} \right) - z \text{ [m]} \quad (6)$$

## 2.2 Schräge Sekundäraufhängung

In den vorangegangenen Überlegungen hängen die Sekundärstropfen vertikal und parallel. Folglich ist der Neigungswinkel der gesamten Aufhängung stets gleich dem Neigungswinkel der Sekundäraufhängung, nämlich  $d\phi$ . Bei einer schrägen Sekundäraufhängung unterscheiden sich die Neigungswinkel  $d\gamma$  von  $d\phi$  und verursachen dadurch ein zusätzliches Kippen der Ladungseinheit. Dieser Vorgang hat einen weiteren Einfluss auf die Lage des virtuellen Schwerpunkts, nach oben oder nach unten, je nach Vorzeichen von  $\gamma$ .

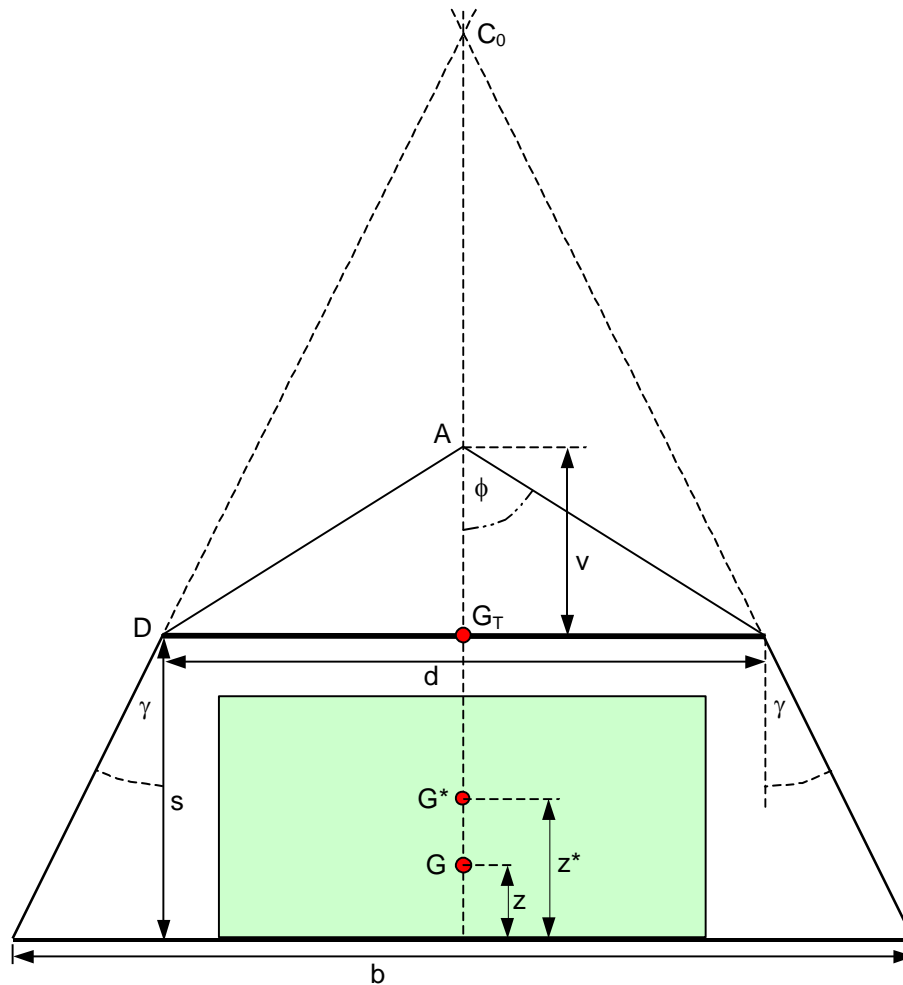


Bild 2.3: Aufhängung mit einem positiven Winkel  $\gamma$  der Sekundäraufhängung

Bild 2.3 zeigt eine Anordnung mit einer schrägen Sekundäraufhängung unter dem positiven Winkel  $\gamma$ . Das Aufhängezentrum liegt bei A, der gemeinsame Schwerpunkt von Ladung und Spreize bei  $G^*$ . Der Punkt  $C_0$  ist das imaginäre Zentrum der Sekundäraufhängung.

Wegen einer unbekanntem Ausmittigkeit  $e$  des Ladungsschwerpunkts wird die Aufhängung am Punkt A um den kleinen Winkel  $d\phi$  geneigt (siehe Bild 2.4). Der gemeinsame Schwerpunkt  $G^*$  findet sich unter dem Aufhängezentrum A ein. Der Ladungsschwerpunkt  $G_1$  liegt auf einer Linie mit  $G^*_1$  und  $G_T$  in einer Position, die einer umgekehrten Proportionalität wie folgt entspricht:

$$\frac{\overline{G_1^* G_1}}{\overline{G_1^* G_T}} = \frac{m_T}{m_C} \quad (7)$$

Das imaginäre Zentrum der Sekundäraufhängung C befindet sich vertikal über  $G_1$  in einem Dreieck BCD (hellblau unterlegt). Die Sekundäraufhängung hat sich folglich um den Winkel  $d\gamma$  geneigt. Die Größe von  $d\gamma$  wird zur Größe von  $d\phi$  in Beziehung gebracht durch:

$$d\gamma = c \cdot d\phi \text{ [rad]} \quad (8)$$

Das Dreieck BCD enthält beide Winkel  $d\gamma$  und  $d\phi$  und wird zur Bestimmung des Proportionalitätsfaktors  $c$  benutzt mit Hilfe des Sinus-Satzes.

Distanz DB =  $d/2 - (1 + m_T/m_C) \cdot v \cdot d\phi$

Distanz BC =  $d / (2 \cdot \tan\gamma)$  (Hinweis: BC =  $G_T C_0$  wenn  $d\phi \rightarrow 0$ )

Winkel BCD =  $\gamma + d\gamma - d\phi$

Winkel CDB =  $90^\circ - \gamma - d\gamma$

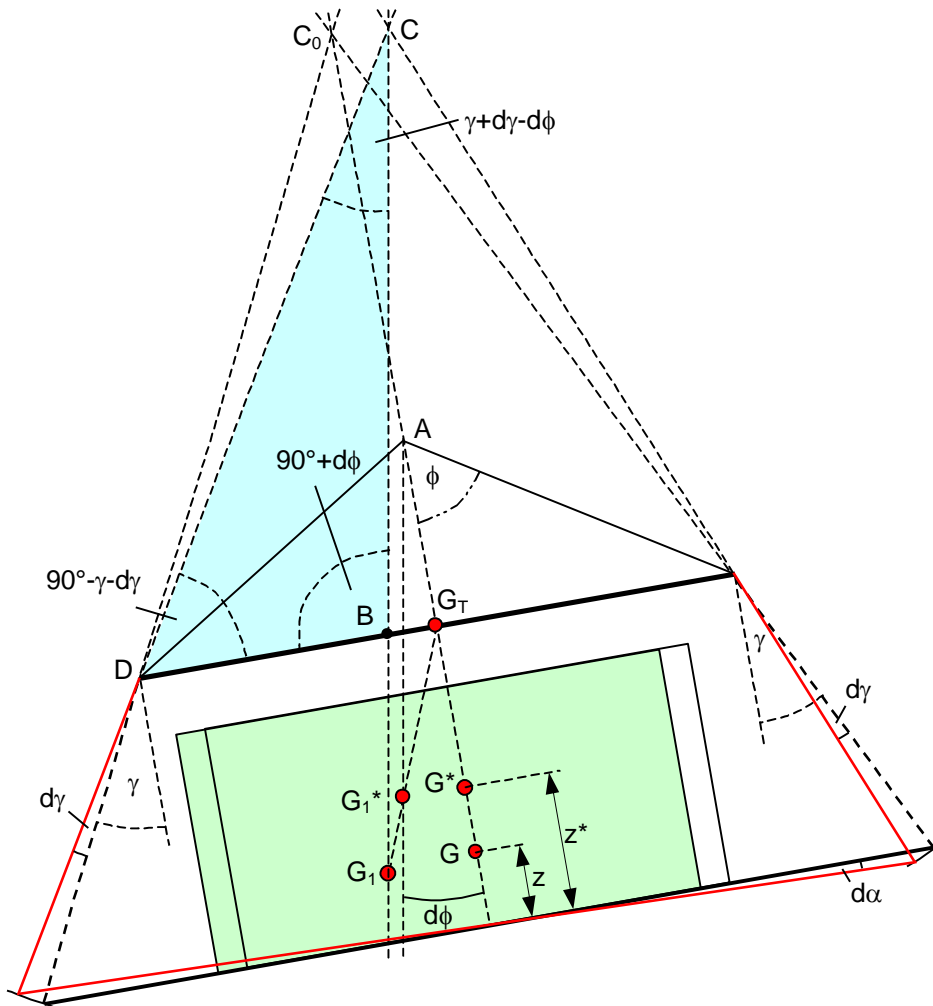


Bild 2.4: Aufhängung gekippt um den Winkel  $d\phi$  wegen einer Ausmittigkeit von G

Sinus-Satz:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DB}} = \frac{\sin(90^\circ - \gamma - d\gamma)}{\sin(\gamma + d\gamma - d\phi)} \quad (9)$$

$$\frac{d}{2 \cdot \tan \gamma \cdot (d/2 - (1 + \frac{m_T}{m_C}) \cdot v \cdot d\phi)} = \frac{\sin(90^\circ - \gamma - c \cdot d\phi)}{\sin(\gamma + c \cdot d\phi - d\phi)} = \frac{\cos(\gamma + c \cdot d\phi)}{\sin(\gamma - (1 - c) \cdot d\phi)}$$

$$\frac{d}{d \cdot \tan \gamma \cdot (1 - (1 + \frac{m_T}{m_C}) \cdot \frac{2 \cdot v}{d} \cdot d\phi)} = \frac{\cos \gamma - c \cdot \sin \gamma \cdot d\phi}{\sin \gamma - (1 - c) \cdot \cos \gamma \cdot d\phi} \quad (11)$$

$$\frac{1}{\tan \gamma - (1 + \frac{m_T}{m_C}) \cdot \frac{\tan \gamma}{\tan \phi} \cdot d\phi} = \frac{\cos \gamma - c \cdot \sin \gamma \cdot d\phi}{\sin \gamma - (1 - c) \cdot \cos \gamma \cdot d\phi}$$

$$\sin \gamma - (1 - c) \cdot \cos \gamma \cdot d\phi = \sin \gamma - c \cdot \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \cdot d\phi - (1 + \frac{m_T}{m_C}) \cdot \frac{\sin \gamma}{\tan \phi} \cdot d\phi + k \cdot d^2 \phi$$

$$-\cos \gamma + c \cdot \cos \gamma = -c \cdot \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} - (1 + \frac{m_T}{m_C}) \cdot \frac{\sin \gamma}{\tan \phi}$$

$$c \cdot \left( \cos \gamma + \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \right) = \cos \gamma - \left( 1 + \frac{m_T}{m_C} \right) \cdot \frac{\sin \gamma}{\tan \phi}$$

$$c \cdot \frac{1}{\cos \gamma} = \cos \gamma - \left( 1 + \frac{m_T}{m_C} \right) \cdot \frac{\sin \gamma}{\tan \phi}$$

$$c = \cos^2 \gamma - \left( 1 + \frac{m_T}{m_C} \right) \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \cos \gamma}{\tan \phi} \tag{10}$$

Diese Lösung zeigt, dass c sowohl von  $\gamma$  als auch von  $\phi$  abhängt.

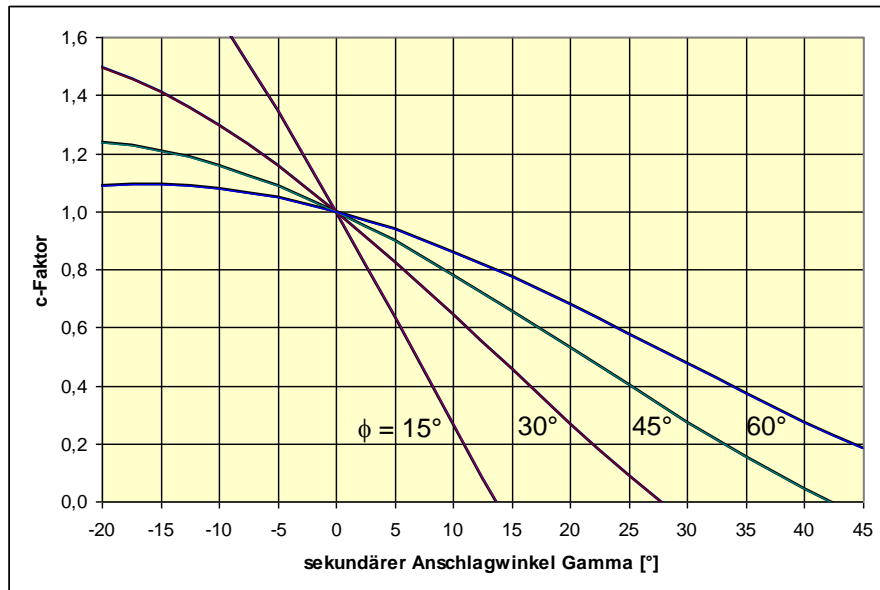


Bild 2.5: Faktor c für  $m_T/m_C = 0.1$  und  $\phi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

Das Ausschwenken der Sekundäraufhängung verursacht einen horizontalen Versatz der Ladung und ein zusätzliches Kippen. Das wird durch die roten Linien in Bild 2.4 angedeutet.

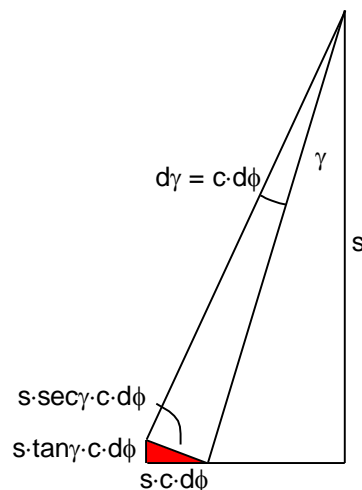


Bild 2.6: Auswandern und Kippen infolge Ausschwenkens der Sekundäraufhängung

Das Kippen um den Winkel  $d\gamma$  verursacht einen Versatz der Ladung um  $(s \cdot c \cdot d\phi)$  nach **links**. Dies geht einher mit einem Anheben der linken Seite um  $(s \cdot \tan \gamma \cdot c \cdot d\phi)$  und einem Absenken der rechten Seite um den gleichen Betrag. Dadurch kippt die Ladung um den Winkel  $d\alpha$  nach **rechts**. Das gilt für einen **positiven** Winkel  $\gamma$ , wenn die Ausmittigkeit nach **links** gerichtet ist

Wenn der Schwerpunkt G um die Distanz z über der Ebene der Anschlagpunkte liegt, wird er sich um die Strecke  $z \cdot d\alpha$  nach **rechts** bewegen. Der Winkel  $d\alpha$  wird bestimmt durch:

$$d\alpha = \frac{2 \cdot c \cdot s \cdot \tan \gamma \cdot d\varphi}{b} \quad [\text{rad}] \quad (11)$$

Die Position des virtuellen Ladungsschwerpunkts wird nun mit Hilfe der noch unbekanntenen Ausmittigkeit e bestimmt:

$$\overline{G^* G^*_1} = (v + s - z^*) \cdot d\varphi = \left( v + s - \frac{z \cdot m_C + s \cdot m_T}{m_C + m_T} \right) \cdot d\varphi \quad [\text{m}] \quad (12)$$

$$\overline{G^* G^*_1} = \frac{m_C \cdot (c \cdot s \cdot d\varphi - \frac{z \cdot 2 \cdot c \cdot s \cdot \tan \gamma \cdot d\varphi}{b} + e)}{m_C + m_T} \quad [\text{m}]$$

$$((v + s) \cdot m_C + v \cdot m_T + s \cdot m_T - z \cdot m_C - s \cdot m_T) \cdot d\varphi = m_C \cdot (c \cdot s \cdot d\varphi - \frac{2 \cdot z \cdot c \cdot s \cdot \tan \gamma \cdot d\varphi}{b} + e)$$

$$(v + s + v \cdot \frac{m_T}{m_C} - z) \cdot d\varphi = c \cdot s \cdot d\varphi - c \cdot z \cdot \frac{b-d}{b} \cdot d\varphi + e \quad [\text{m}]$$

$$e = (v \cdot (1 + \frac{m_T}{m_C}) + s \cdot (1 - c) - z \cdot (1 - c \cdot \frac{b-d}{b})) \cdot d\varphi \quad [\text{m}] \quad (13)$$

Die wirksame metazentrische Höhe der Aufhängung ist:

$$h = v \cdot (1 + \frac{m_T}{m_C}) + s \cdot (1 - c) - z \cdot (1 - c \cdot \frac{b-d}{b}) \quad [\text{m}] \quad (14)$$

Diese Formel kann mit  $d = 2 \cdot v \cdot \tan \varphi$  and  $b = d + 2 \cdot s \cdot \tan \gamma$  geschrieben werden:

$$h = v \cdot (1 + \frac{m_T}{m_C}) + s \cdot (1 - c) - z \cdot (1 - c \cdot \frac{s \cdot \tan \gamma}{v \cdot \tan \varphi + s \cdot \tan \gamma}) \quad [\text{m}] \quad (15)$$

### 2.3 Flexible Primäraufhängungen

Die vorangegangenen Untersuchungen gehen davon aus, dass die Länge von Stropfen unter Last unveränderlich ist, d.h. die anfängliche Längung ändert sich nicht infolge kleiner Laständerungen durch Schräglage. Das ist sicherlich berechtigt bei Drahtseilstropfen mit Längenänderungen, die sich an einem E-Modul von ca.  $10^4 \text{ kN/cm}^2$  ausrichten. Die elastische Dehnung von Polyesterstropfen ist jedoch viel größer und der Sekundäreffekt von Dehnungsänderungen aufgrund einer Schräglage der Ladung kann zu einem zusätzlichen Stabilitätsabbau führen.

Bild 2.7 zeigt einen Tandem-Umschlag mit zwei gleichen Primäraufhängungen aus Drahtseilstropfen. Das ist im Allgemeinen unkritisch. Es könnte jedoch kritisch werden, wenn die Drahtseilstropfen durch Polyesterstropfen ersetzt würden.

Die nachstehende Analyse untersucht die Primäraufhängung einer Ladungseinheit mit Anschlagpunkten unterhalb des Schwerpunkts G. Die Stropfen haben eine bestimmte Elastizität, so dass die ursprünglich gleichen Längen infolge ungleicher Lastaufnahme verschieden werden. Die Betrachtung wird für die Längs- und für die Queransicht durchgeführt.

Das Ziel der Untersuchung ist auf die grundsätzlichen Größen gerichtet, die Einfluss auf die Aufhängestabilität nehmen. Deshalb wird Symmetrie sowohl in Längs- als auch in Queransicht angenommen. Die Kräfte in den Stropfen sind also im Ausgangszustand untereinander gleich.



In der aufrechten Lage (Bild 2.8 links) wird die Belastung  $F_0$  in beiden Stropfen durch das Gewicht  $W = m \cdot g$  der Ladung unter Annahme von 4 Stropfen bestimmt:

$$F_0 = \frac{W}{4} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \text{ [kN]} \quad (16)$$

Die Bestimmung der Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  in der geneigten Lage soll die Beziehung der Kraftunterschiede  $dF$  zum Neigungswinkel  $d\varphi$  liefern.

$$Q = F_1 \cdot \sin(\varphi - d\varphi) = F_2 \cdot \sin(\varphi + d\varphi) \text{ [kN]}$$

$$W/2 = F_1 \cdot \cos(\varphi - d\varphi) + F_2 \cdot \cos(\varphi + d\varphi) \text{ [kN]}$$

$$F_2 = \frac{W/2 - F_1 \cdot \cos(\varphi - d\varphi)}{\cos(\varphi + d\varphi)} \text{ [kN]}$$

$$F_1 \cdot \sin(\varphi - d\varphi) = \frac{W/2 - F_1 \cdot \cos(\varphi - d\varphi)}{\cos(\varphi + d\varphi)} \cdot \sin(\varphi + d\varphi) \text{ [kN]}$$

$$F_1 \cdot (\sin(\varphi - d\varphi) \cdot \cos(\varphi + d\varphi) + \cos(\varphi - d\varphi) \cdot \sin(\varphi + d\varphi)) = W \cdot \sin(\varphi + d\varphi) / 2$$

$$F_1 \cdot \sin((\varphi - d\varphi) + (\varphi + d\varphi)) = F_1 \cdot \sin(2 \cdot \varphi) = W \cdot \sin(\varphi + d\varphi) / 2$$

$$F_1 \cdot 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = W \cdot \sin(\varphi + d\varphi) / 2 = W \cdot (\sin\varphi \cdot \cos d\varphi + \cos\varphi \cdot \sin d\varphi) / 2$$

$$F_1 \cdot 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = W \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi \cdot d\varphi) / 2; \text{ Hinweis: } \cos d\varphi = 1; \sin d\varphi = d\varphi$$

Ebenso:

$$F_2 \cdot 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = W \cdot (\sin\varphi - \cos\varphi \cdot d\varphi) / 2$$

$$F_1 = \frac{W}{4} \cdot \frac{(\sin\varphi + \cos\varphi \cdot d\varphi)}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{W}{4} \cdot \frac{(\sin\varphi - \cos\varphi \cdot d\varphi)}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} \text{ [kN]} \quad (17)$$

$$dF = F_1 - F_0 \quad \text{and} \quad dF = F_0 - F_2 \text{ [kN]}$$

$$dF = \frac{W}{4} \cdot \frac{\sin(\varphi \pm d\varphi)}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} - \frac{W}{4} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{W}{4} \cdot \frac{\sin\varphi \pm \cos\varphi \cdot d\varphi - \sin\varphi}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} \text{ [kN]}$$

$$dF = \pm \frac{W}{4} \cdot \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \text{ [kN]} \quad (18)$$

Der Kraftunterschied  $dF$  verursacht einen Längenunterschied  $dL$  in den Stropfen. Dieser Unterschied lässt sich mit der normierten Federkonstanten  $D_N$  der Stropfen bestimmen.

$$dL = \frac{dF \cdot L}{D_N} \text{ [m]} \quad (19)$$

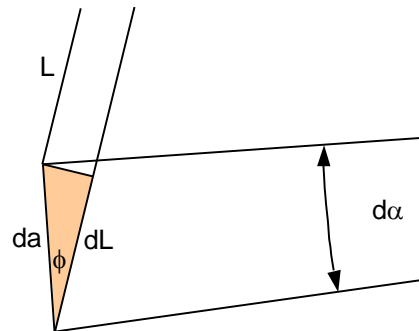
Die normierte Federkonstante  $D_N$  eines Stropfs wird ermittelt durch:

$$D_N = \frac{\Delta F}{\varepsilon} \text{ [kN]} \quad (20)$$

Versuche mit Polyesterstropfen haben  $\varepsilon = 0.023$  für  $\Delta F = WLL$  ergeben. Unterstellt man eine Belastung von  $WLL$  beim Umschlag, so erhält man das zugehörige  $D_N$  durch:

$$D_N = \frac{W}{4 \cdot \varepsilon \cdot \cos\varphi} \text{ [kN]} \quad (21)$$

Infolge der Längenänderung  $dL$  wird die Anschlagbasis um den Winkel  $d\alpha$  geneigt.

Bild 2.9: Neigungswinkel  $d\alpha$  infolge Längenänderungen der Stropfen

$$d\alpha = \frac{2 \cdot da}{b} = \frac{2 \cdot dL}{b \cdot \cos \phi} = \frac{2 \cdot dF \cdot L}{D_N \cdot b \cdot \cos \phi} = \frac{2 \cdot L \cdot \varepsilon}{b \cdot \sin \phi} \cdot d\phi \quad [\text{rad}]$$

$$d\alpha = \frac{4 \cdot L^2 \cdot \varepsilon}{b^2} \cdot d\phi \quad [\text{rad}] \quad (22)$$

Der sekundäre Querversatz des Schwerpunkts infolge der Neigung  $d\alpha$  beträgt  $z \cdot d\alpha$  mit  $z =$  Höhenlage des Schwerpunkts  $G$  über Anschlagbasis. Mit dem beobachteten Neigungswinkel  $d\phi$  kann nun die anfänglich unbekannte Ausmittigkeit des Schwerpunkts  $e$  und schließlich die metazentrische Höhe  $h$  zur Beurteilung der Aufhängestabilität gefunden werden.

$$e + z \cdot d\alpha = (v - z) \cdot d\phi \quad [\text{m}] \quad (23)$$

$$e = (v - z) \cdot d\phi - z \cdot d\alpha$$

$$e = \left( v - z \cdot \left( 1 + \frac{4 \cdot L^2 \cdot \varepsilon}{b^2} \right) \right) \cdot d\phi \quad [\text{m}] \quad (24)$$

$$h = v - z \cdot \left( 1 + \frac{4 \cdot L^2 \cdot \varepsilon}{b^2} \right) \quad [\text{m}] \quad (25)$$

Die metazentrische Höhe  $h$  verringert sich mit wachsenden Werten von  $L$  und verringerten Werten von  $b$ .

### Queransicht

Es gibt in der Queransicht kein gemeinsames Aufhängezentrum. Eine anfänglich unbekannte Ausmittigkeit  $e$  des Ladungsschwerpunkts verursacht eine Belastungsänderung in den Aufhängungen, und zwar in Bild 2.10 eine Zunahme links und eine Abnahme rechts. Die Stropfen reagieren darauf mit einer Verlängerung links und einer Verkürzung rechts. Dies verursacht ein Kippen der Anschlagbasis, was wiederum den Querversatz  $e$  des Schwerpunkts um die Strecke  $z \cdot d\alpha$  vergrößert. Der Gesamtversatz  $(e + z \cdot d\alpha)$  ist schließlich die Ursache der Belastungsänderung. In der aufrechten Lage werden die Kräfte in allen Stropfen durch das Gewicht  $W = m \cdot g$  der Ladung bestimmt:

$$F_0 = \frac{W}{4} \cdot \frac{1}{\cos \phi} \quad [\text{kN}] \quad (16)$$

In der geneigten Lage betragen die Kräfte an den Kranhaken:



$$H_{\text{links}} = W \cdot \left( \frac{l/2 + e + z \cdot d\alpha}{l} \right) = \frac{W}{2} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot (e + z \cdot d\alpha)}{l} \right) \text{ [kN]}$$

$$H_{\text{rechts}} = W \cdot \left( \frac{l/2 - e - z \cdot d\alpha}{l} \right) = \frac{W}{2} \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot (e + z \cdot d\alpha)}{l} \right) \text{ [kN]}$$

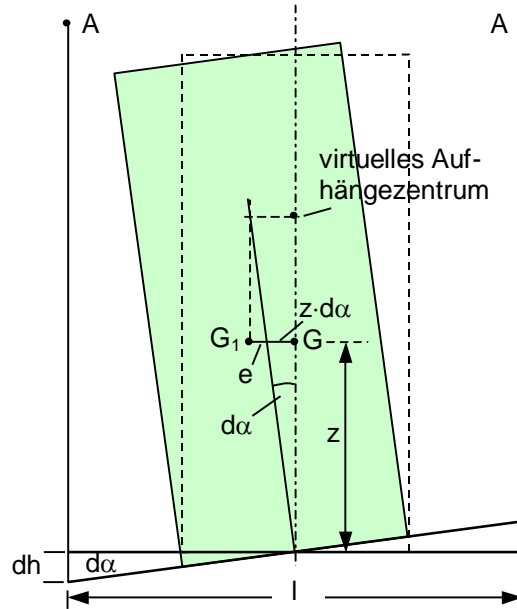


Bild 2.10: Tandem-Aufhängung in Queransicht

Die Kräfte in den Stropfen betragen:

$$F = \frac{W}{4 \cdot \cos \varphi} \cdot \left( 1 \pm \frac{2 \cdot (e + z \cdot d\alpha)}{l} \right) \text{ [kN]} \quad (26)$$

Die Kraftunterschiede sind:

$$dF = \pm \frac{W \cdot (e + z \cdot d\alpha)}{2 \cdot l \cdot \cos \varphi} \text{ [kN]} \quad (27)$$

Die Längenänderungen der Stropfen betragen:

$$dL = \pm \frac{dF \cdot L}{D_N} = \pm \frac{W \cdot (e + z \cdot d\alpha) \cdot L}{2 \cdot D_N \cdot l \cdot \cos \varphi} \text{ [m]} \quad (28)$$

Die Vertikalkomponenten dieser Längenänderungen sind:

$$dh = \pm dL \cdot \cos \varphi = \pm \frac{W \cdot (e + z \cdot d\alpha) \cdot L}{2 \cdot D_N \cdot l} \text{ [m]} \quad (29)$$

Die Distanz dh kann auch ausgedrückt werden durch:

$$dh = \pm \frac{l}{2} \cdot d\alpha \text{ [m]} \quad (30)$$

Das gestattet die Berechnung der anfänglich unbekanntenen Ausmittigkeit e:

$$\frac{W \cdot L \cdot (e + z \cdot d\alpha)}{2 \cdot D_N \cdot l} = \frac{l \cdot d\alpha}{2} \text{ [m]}$$

$$e = \left( \frac{l^2 \cdot D_N}{W \cdot L} - z \right) \cdot d\alpha \text{ [m]} \quad (31)$$

Mit der zuvor definierten normierten Federkonstanten beträgt die metazentrische Höhe:

$$h = \frac{l^2}{4 \cdot v \cdot \varepsilon} - z \text{ [m]} \tag{32}$$

Die metazentrische Höhe verringert sich mit wachsenden Werten von  $v$  und  $\varepsilon$  und abnehmenden Werten von  $l$ .

### 2.4 Asymmetrische Aufhängungen

Die Untersuchungen der vorangegangenen Kapitel waren auf Aufhängungen mit identischen Anordnungen an beiden Enden der Ladungseinheit gerichtet. Es gibt jedoch recht häufig Aufhängungen mit unterschiedlichen Anordnungen an beiden Enden, z.B.:

- unterschiedliche Niveaus der Anschlagpunkte,
- unterschiedliche Niveaus der Aufhängezentren,
- unterschiedliche Typen und Gestaltungen der Aufhängungen.

Bild 2.11 zeigt eine asymmetrische Aufhängung mit links einem einzelnen primären Stropp, der unterhalb des Schwerpunkts befestigt ist, und rechts einer kombinierten Primär- und Sekundäraufhängung mit Anschlagbasis über dem Schwerpunkt. Die Aufhängung ist offenbar stabil, aber die Sicherheitsreserve ist nicht ersichtlich.

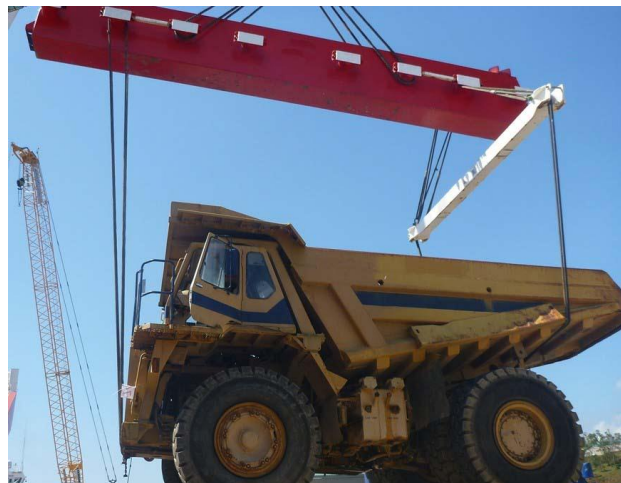


Bild 2.11: Asymmetrische Aufhängung

Bild 2.12 erläutert die Prinzipien der in Bild 2.11 gezeigte Aufhängung.

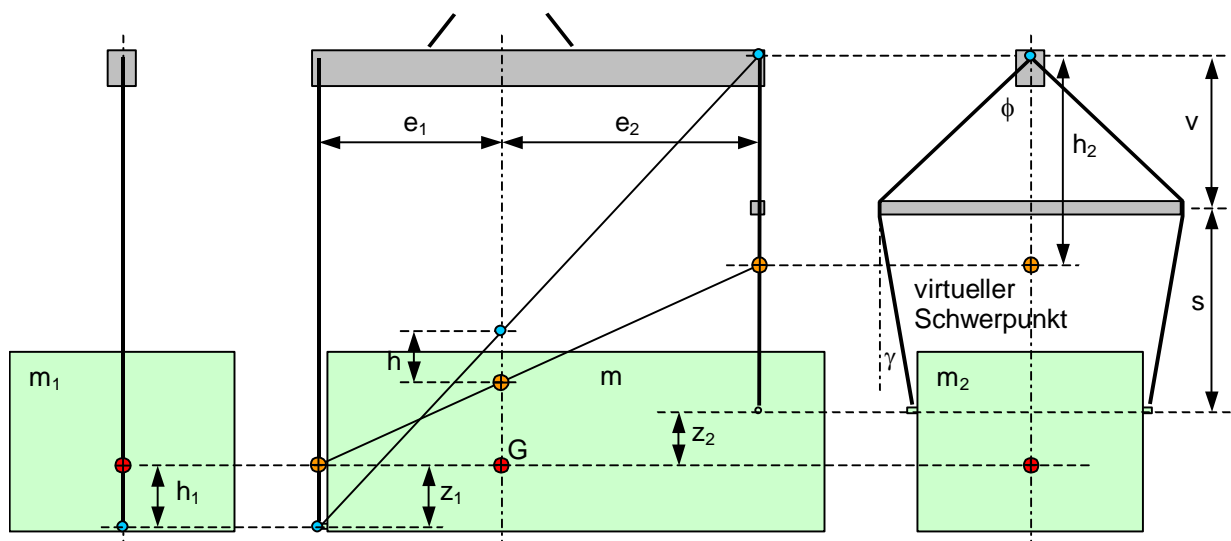


Bild 2.12: Asymmetrische Aufhängung

Die linke Anordnung trägt die Teilmasse  $m_1$ , die rechte Anordnung die Teilmasse  $m_2$ . Die Aufteilung folgt dem Prinzip der umgekehrten Proportionalität:

$$m_1 = m \cdot \frac{e_2}{e_1 + e_2} \quad \text{und} \quad m_2 = m \cdot \frac{e_1}{e_1 + e_2} \quad (33)$$

**Linke Seite:** Der einzelne Primärstropp verläuft zwingend vertikal in der Querebene. Wenn er an der Ladung unterhalb ihres Schwerpunkts befestigt wird, stellt er eine instabile Aufhängung dar mit der negativen metazentrischen Höhe  $h_1$ . Wird die Ladung um den kleinen Winkel  $d\phi$  geneigt, wird ein negatives Stabilitätsmoment erzeugt.

$$M_1 = m_1 \cdot g \cdot h_1 \cdot d\phi \quad [\text{kN}\cdot\text{m}] \quad (34)$$

**Rechte Seite:** Die Aufhängung mit einer Spreize hat die gleiche Wirkung, wie in Kapitel 2.2 erörtert. Der Schwerpunkt der Teilmasse  $m_2$  wird in eine virtuelle Position angehoben mit einer hier noch positiven metazentrischen Höhe  $h_2$ . Wird die Ladung um den kleinen Winkel  $d\phi$  geneigt, so wird ein positives Stabilitätsmoment erzeugt.

$$M_2 = m_2 \cdot g \cdot h_2 \cdot d\phi \quad [\text{kN}\cdot\text{m}] \quad (35)$$

Die algebraische Summe beider Momente ist gleich dem Moment aus Gesamtmasse  $m$  und dem Hebel aus der gemeinsamen metazentrischen Höhe  $h$ .

$$M_1 + M_2 = m \cdot g \cdot h \cdot d\phi \quad [\text{kN}\cdot\text{m}]$$

Das Vorzeichen der gemeinsamen metazentrischen Höhe  $h$  entscheidet über die Stabilität der ganzen Aufhängung.

$$h = \frac{m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2}{m} \quad [\text{m}] \quad (36)$$

Bild 2.12 enthält auch einen geometrischen Ansatz zur Auffindung der gemeinsamen metazentrischen Höhe  $h$ . In der Seitenansicht werden die beiden Aufhängezentren (blaue Punkte) durch eine Gerade verbunden. Das Gleiche geschieht mit den beiden aktiven Schwerpunkten der Teilmassen (orangefarbene Punkte). Diese Linien schneiden die Vertikale durch den gemeinsamen Schwerpunkt der Ladung. Die Schnittpunkte kennzeichnen das gemeinsame Aufhängezentrum und den gemeinsamen virtuellen Schwerpunkt der Ladung. Der vertikale Abstand dieser Punkte ist die gemeinsame metazentrische Höhe  $h$ . Sie ist in diesem Beispiel positiv. Die Aufhängung ist stabil.

Der Nachweis der Richtigkeit der geometrischen Lösung wird wiefolgt gezeigt:

$$\begin{aligned} h &= \frac{m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2}{m} \quad [\text{m}] \\ h &= \frac{m \cdot \frac{e_2}{e_1 + e_2} \cdot h_1 + m \cdot \frac{e_1}{e_1 + e_2} \cdot h_2}{m} \quad [\text{m}] \\ h &= \frac{h_1 \cdot e_2 + h_2 \cdot e_1}{e_1 + e_2} \quad [\text{m}] \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt  $h$  als gewichtetes Mittel in geometrischer Darstellung.