Ableitung: Kraftverteilungen in Niederzurrungen

Die nachstehenden Überlegungen sind grundsätzlicher Art und beschäftigen sich mit der Kraftverteilung in Niederzurrungen unter Beachtung der Euler'schen Kantenreibung. Um die Erkenntnisse möglichst allgemein nutzen zu können, werden die Überlegungen an der Zurrgeometrie einer überbreiten Ladung angestellt.

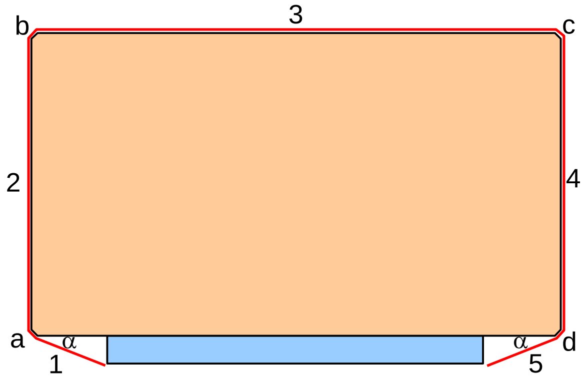

Bild 1: Niederzurrung einer überbreiten Ladung

Bild 1 zeigt die Niederzurrung einer überbreiten Ladung mit den Gurtabschnitten 1 bis 5 und den Umlenkstellen a bis d. Die Position der Spannvorrichtung (Ratsche) ist noch nicht festgelegt. Als Zurrwinkel α wird der Winkel zwischen Ladefläche und dem jeweils untersten Gurtabschnitt bezeichnet. Das hat den Vorteil, dass die Vertikalkomponenten dieser Gurtabschnitte, wie von unterbreiter Ladungen gewohnt, mit dem Sinus des Zurrwinkels bestimmt werden können.

Mögliche Kraftunterschiede

Wegen der Möglichkeit des Rutschens des Gurts an den Umlenkstellen können sich benachbarte Kräfte nicht beliebig unterscheiden. Für sie muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{1}{c} \geq \frac{F_n}{F_{n+1}} \geq c \quad \text{mit} \qquad c = e^{-\mu_L \cdot \beta}$$

F_n =Kraft in einem Gurtabschnitt [daN]
μ_L = Reibbeiwert zwischen Zurrgurt und Ladung
β = Winkeländerung des Gurts an der Ladungskante [rad]

Beispiel: Mit β = 75° und μ_L = 0,2 ist c = 0,77 und 1/c = 1,30. Die Verhältnisse benachbarter Kräfte müssen hier also zwischen 0,77 und 1,30 liegen.

Vollständiger Kraftausgleich

Annahme: In den fünf Abschnitten der gezeigten Niederzurrung herrschen die fünf unterschiedlichen Kräfte F_1, F_2, F_3, F_4 und F_5. Die zuvor genannten Bedingungen für benachbarte Kräfte sollten im Sinne eines statischen Gleichgewichts eingehalten sein. Es ist aber nicht grundsätzlich erforderlich.

Ausgehend von den fünf unterschiedlichen Kräften soll festgestellt werden, welche **einheitliche Kraft F_0** im Gurt herrscht, wenn sich die Unterschiede – auf welche Weise auch immer – vollständig ausgeglichen haben, ohne dass an dem Gurt etwas geändert wurde.

Der Kräfteausgleich vollzieht sich durch kleine Rutschstrecken des Gurts an den vier Kanten der Ladungseinheit, durch welche sich die vorgespannten Gurtlängen in den einzelnen Abschnitten so verlängern oder verkürzen, dass der Kräfteausgleich stattfindet. Diese Rutschstrecken werden mit $\Delta L_{a,b,c,d}$ bezeichnet. Die zugehörigen Kraftänderungen lassen sich über die Federkonstanten $D_{1,2,3,4,5}$ der fünf Gurtabschnitte bestimmen. Diese Federkonstanten ergeben sich aus der normierten, auf 1 m Gurtlänge bezogenen Federkonstante D_N nach der Gleichung:

$$D_{1,2,3,4,5} = \frac{D_N}{L_{1,2,3,4,5}} \text{ [daN/m]}$$

Für die einheitliche Kraft F_0 gelten die fünf Gleichungen:

$$F_0 = F_{1,2,3,4,5} + \Delta F_{1,2,3,4,5}$$

Die einzelnen Kraftänderungen ΔF_i werden nun genauer untersucht. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\Delta F_1 = \Delta L_a \cdot D_1 && \rightarrow && \Delta L_a = \Delta F_1 / D_1 \\
&\Delta F_2 = -\Delta L_a \cdot D_2 + \Delta L_b \cdot D_2 \\
&\Delta F_3 = -\Delta L_b \cdot D_3 + \Delta L_c \cdot D_3 \\
&\Delta F_4 = -\Delta L_c \cdot D_4 + \Delta L_d \cdot D_4 \\
&\Delta F_5 = -\Delta L_d \cdot D_5 && \rightarrow && \Delta L_d = -\Delta F_5 / D_5
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke für ΔL_a und ΔL_d werden in die Gleichungen für ΔF_2 und ΔF_4 eingesetzt:

$$\begin{aligned}
&\Delta F_2 = -\Delta F_1 \cdot D_2 / D_1 + \Delta L_b \cdot D_2 && \rightarrow && \Delta L_b = \Delta F_2 / D_2 + \Delta F_1 / D_1 \\
&\Delta F_4 = -\Delta L_c \cdot D_4 - \Delta F_5 \cdot D_4 / D_5 && \rightarrow && \Delta L_c = -\Delta F_5 / D_5 - \Delta F_4 / D_4
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke für ΔL_b und ΔL_c werden in die Gleichung für ΔF_3 eingesetzt:

$$\Delta F_3 = -\Delta F_2 \cdot D_3 / D_2 - \Delta F_1 \cdot D_3 / D_1 - \Delta F_5 \cdot D_3 / D_5 - \Delta F_4 \cdot D_3 / D_4$$

Daraus wird geordneter:

$$\Delta F_1 / D_1 + \Delta F_2 / D_2 + \Delta F_3 / D_3 + \Delta F_4 / D_4 + \Delta F_5 / D_5 = 0$$

Die Federkonstante D_i ist jeweils umgekehrt proportional zu Länge L_i jedes Gurtabschnitts. Die normierte Federkonstante D_N ist für jeden Gurtabschnitt gleich. Somit erhält man:

$$\Delta F_1 \cdot L_1 + \Delta F_2 \cdot L_2 + \Delta F_3 \cdot L_3 + \Delta F_4 \cdot L_4 + \Delta F_5 \cdot L_5 = 0$$

Multipliziert man jede der fünf Gleichungen für die gesuchte Kraft F_0 mit der zugehörigen Länge L_i, so erhält man:

$$\begin{aligned}
F_0 \cdot L_1 &= F_1 \cdot L_1 + \Delta F_1 \cdot L_1 \\
F_0 \cdot L_2 &= F_2 \cdot L_2 + \Delta F_2 \cdot L_2 \\
F_0 \cdot L_3 &= F_3 \cdot L_3 + \Delta F_3 \cdot L_3 \\
F_0 \cdot L_4 &= F_4 \cdot L_4 + \Delta F_4 \cdot L_4 \\
F_0 \cdot L_5 &= F_5 \cdot L_5 + \Delta F_5 \cdot L_5
\end{aligned}$$

Diese fünf Gleichungen werden addiert, wobei die Summe der gewichteten Kraftänderungen gleich Null ist und damit nicht mehr in Erscheinung tritt.

$$F_0 \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) = F_1 \cdot L_1 + F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot L_3 + F_4 \cdot L_4 + F_5 \cdot L_5$$

Damit wird F_0 bestimmt zu:

$$F_0 = \frac{F_1 \cdot L_1 + F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot L_3 + F_4 \cdot L_4 + F_5 \cdot L_5}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5} \text{ [daN]}$$

Diese Lösung ist überraschend einfach und elegant. Sie ist von der Elastizität des Gurts unabhängig. Aber dabei darf nicht übersehen werden, dass in der Herleitung der Formel eine einheitliche normierte Federkonstante D_N über die gesamte Gurtlänge vorausgesetzt wurde. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wird die Lösungsformel etwas komplizierter.

In der Praxis wird in einem oder sogar zweien der Gurtabschnitte ein Spannmittel eingefügt sein. Diese Spannratschen besitzen eine wesentlich größere Federkonstante als der Gurt. Für praktische Belange kann die Ratsche als ideal steif angesehen werden. Ihre Länge ist dann von der Abschnittslänge des Gurts abzuziehen.

Größtmöglicher Kraftunterschied

Annahme: Es herrscht die einheitliche Kraft F_0 in allen Teilen der Niederzurrung. Eine kleine Ladungsbewegung zu einer Seite lässt die Kraft in den Endabschnitten des Gurts auf der einen Seite zu- und auf der anderen Seite abnehmen. In den übrigen Abschnitten liegen die Kräfte dazwischen. Wenn die Kräfte zueinander in der festen Beziehung der Euler'schen Kantenreibung stehen, ändern sie sich nicht mehr, auch wenn die Ladung weiter rutscht.

Unter Vernachlässigung von winzigen Ungleichheiten der Längenänderungen auf beiden Seiten aus geometrischen Ursachen (Fehler 2. Ordnung) werden die einzelnen Kräfte mit Hilfe des Euler'schen Kriteriums in Abhängigkeit von F_1 bestimmt. F_1 ist hier die größte Kraft, sofern die Ladung nach links rutscht. F_5 ist folglich die kleinste Kraft. Es gilt:

$$F_1 = F_1$$
$$F_2 = c_a \cdot F_1$$
$$F_3 = c_a \cdot c_b \cdot F_1$$
$$F_4 = c_a \cdot c_b \cdot c_c \cdot F_1$$
$$F_5 = c_a \cdot c_b \cdot c_c \cdot c_d \cdot F_1$$

Die Faktoren c_a bis c_d stehen für die Euler'schen Umlenkverluste an den Kanten der Ladungseinheit. Mit der zuvor gefundenen Bestimmungsgleichung für F_0 gilt:

$$F_0 = \frac{F_1 \cdot L_1 + c_a \cdot F_1 \cdot L_2 + c_a \cdot c_b \cdot F_1 \cdot L_3 + c_a \cdot c_b \cdot c_c \cdot F_1 \cdot L_4 + c_a \cdot c_b \cdot c_c \cdot c_d \cdot F_1 \cdot L_5}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5}$$

Nach F_1 aufgelöst erhält man:

$$F_1 = \frac{F_0 \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)}{L_1 + c_a \cdot L_2 + c_a \cdot c_b \cdot L_3 + c_a \cdot c_b \cdot c_c \cdot L_4 + c_a \cdot c_b \cdot c_c \cdot c_d \cdot L_5}$$

$$F_5 = c_a \cdot c_b \cdot c_c \cdot c_d \cdot F_1$$

Will man von beliebigen, unterschiedlichen Anfangskräften F_1 bis F_5 direkt auf die Euler'sche Grenzverteilung schließen, die sich nach einer kleinen Ladungsverschiebung einstellt, so kann man den rechnerischen Umweg über die einheitliche Ausgleichskraft F_0 vermeiden. Um nachstehend Verwechselungen zwischen den Anfangskräften und den Kräften der Grenzverteilung zu vermeiden, wird für letztere die Kraft im linken Endabschnitt des Gurts mit F_L und die Kraft rechts mit F_R bezeichnet. Es gelten die Gleichungen:

$$F_L = \frac{F_1 \cdot L_1 + F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot L_3 + F_4 \cdot L_4 + F_5 \cdot L_5}{L_1 + c_a \cdot L_2 + c_a \cdot c_b \cdot L_3 + c_a \cdot c_b \cdot c_c \cdot L_4 + c_a \cdot c_b \cdot c_c \cdot c_d \cdot L_5} \quad [\text{daN}]$$

$$F_R = c_a \cdot c_b \cdot c_c \cdot c_d \cdot F_L \quad [\text{daN}]$$

Mit diesen Gleichungen lassen sich, ausgehend von einer Anfangsverteilung der Gurtkräfte, die sich durch eine bestimmte Position des oder der Spannmittel ergibt, die Euler'sche Grenzverteilung bestimmen und damit die für die Ladungssicherung maßgebenden Kräfte in den beiden Endabschnitten des Gurts.

Die konventionelle Bewertung einer Niederzurrung geht von den anfänglichen Kräften in den Endabschnitten aus und berücksichtigt zudem nur die Vertikalkomponenten dieser Kräfte. Eine realistischere Bewertung berücksichtigt die sich einstellenden Endkräfte der Euler'schen Grenzverteilung und neben deren Vertikalkomponenten auch ihre Horizontalkomponenten.

Auf diese Weise lässt sich schließlich auch der Einfluss der Position des Spannmittels auf die Sicherungswirkung der Niederzurrung realistisch untersuchen.